த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—527

சமன்பாட்டுக் கொள்கை

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்கள்

ஆர். அய்யாசாமி, எம்.ஏ., பி.டி.
முதல்வர்,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
சென்னை.

கா. கனகசபாபதி, எம்.எஸ்ஸி.,
கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—November, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 527

© Tamil Nadu Text Book Society

THEORY OF EQUATIONS

R. AYYASAMY AND K. KANAKASABAPATHI

Price Rs. 6-10

Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane, Mount Road,
Madras-2,

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

MADRAS-600

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்ருண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்ருன **'சமன்பாட்டுக் கொள்கை'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 527 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 562 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. தோற்றுவாய் 1
2. சமன்பாட்டின் பொதுவான இயல்புகள்... ... 22
3. சமன்பாட்டின் கெழுக்களுக்கும் தீர்வுகளுக்கும் உள்ள தொடர்புகள் 53
4. சமன்பாடுகளின் மாற்றமைப்புகள் 68
5. சமச்சீர் சார்புகள் 118
6. நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடுகள் அல்லது தலைகீழ்ச் சமன்பாடுகள் 144
7. முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகள் 173
8. சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப் பிரித்தல் 204
9. தோராயத் தீர்வுகள் 241

கலைச்சொற்கள் 271

1. தோற்றுவாய்

(Introduction)

1. எண் : மெய்யெண் (Real number) :

± 10, ± 122, ± 3, ... போன்ற **கூட்டு, கழிவு முழுஎண்களும்** (Positive and negative integers), $\pm 2/3$ $+ \frac{p}{q}$, ... (p, q முழு எண்கள்) போன்ற கூட்டு, **கழிவு பின்னங்களும்** (Positive and negative fractions) சேர்ந்த எண்களின் பகுதியை **அளவிற்கிணங்கிய எண்கள்** (Rational numbers) என்கின்ருேம். இவற்றை விகிதமுறு எண்கள் எனவும் கூறுவதுண்டு. p/q என்ற வடிவில் எழுத இயலாத $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, ... போன்ற எண்களை நாம் அளவிற்கிணங்காத எண்கள் அல்லது விகிதமுரு எண்கள் (Irrational Numbers) என்கின்ருேம். அளவிற்கிணங்கிய எண்களும், அளவிற்கிணங்காத எண்களும் சேர்ந்த எண் குழுவை மெய் எண்கள் (Real Numbers) எனக் கூறுகின்ருேம்.

2. கற்பனை எண் (Imaginary Number)

$i^2 = -1$ அல்லது $i = \sqrt{-1}$ என்பதை நாம் கற்பனை எண் என்கின்ருேம். பொதுவாக கற்பனை எண்ணை $a + ib$ என்ற வடிவத்தில் எழுதுகின்ருேம். இங்கு aஐ மெய்ப்பிரிவு என்றும், bஐக் கற்பனைப் பிரிவு என்றும் (Real and imaginary parts) வழங்குகின்ருேம். $a + ib$ என்ற கற்பனை எண்ணை (a, b) எனக் குறிப்போம். எனவே $3 + 3i$ என்பதை $(3, 3)$ எனவும், $4i$ என்பதை $(0, 4)$ எனவும் குறிக்கலாம். இனி இரு கற்பனை எண்களின் கூட்டல், பெருக்கல், கழித்தல், வகுத்தல் முதலியவற்றைக் காண்போம்.

3 சமத்தன்மை (Equality)

(a, b), (c, d) என்ற இரு கற்பனை எண்களில் $a = c$, $b = d$ ஆயின் இவ்விரு எண்களும் சமமாகும்.

4 கூட்டல் (Addition)

(a, b), (c, d) என்ற இரு எண்களின் கூட்டுத் தொகை $(a + c, b + d)$ ஆகும். அதாவது இரு எண்களின் மெய்ப் பிரிவையும், கற்பனைப் பிரிவையும் தனித்தனியே கூட்ட வேண்டும்.

எனவே

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(5, 4) + (-5, -4) = (0, 0)$$

$$(10, -3) + (5, 7) = (15, 4)$$ ஆகும்.

5 பெருக்கல் (Multiplication)

(a, b), (c, d) என்பதின் பெருக்குத் தொகையை $(ac - bd, ad + bc)$ என வரையறுக்கின்றோம்.

எனவே,

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$(5, 10) \times (4, 3) = (-10, 55)$$

$$(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$$ ஆகும்.

6 கழித்தல் (Subtraction)

(a, b) என்ற எண்ணிலிருந்து (c, d) என்ற எண்ணைக் கழித்தால் மிஞ்சுவது (x, y) எனக்

$$(c, d) + (x, y) = (a, b)$$

$$(c, d) + (x, y) = (c + x, d + y)$$

$$= (a, b)$$

$c + x = a$, $d + y = b$ ஆகும்.

அதாவது $x = a - c,\ y = b - d$

$$(a,\ b) - (c,\ d) = (a - c,\ b - d) \text{ ஆகும்}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$(5,\ 10) - (10,\ 5) = (-5,\ 5)$$

$$(p,\ q) - (0,\ 0) = (p,\ q)$$

$$(p,\ q) - (5,\ 7) = (p - 5,\ q - 7)$$

7 வகுத்தல் (Division)

$(0, 0)$ நீங்கலாக $(a,\ b)$ என்ற எண்ணை $(c,\ d)$ என்பதால் வகுக்கும் பொழுது ஈவு $(x,\ y)$ என்க.

அதாவது,

$$\frac{(a,\ b)}{(c,\ d)} = (x,\ y)$$

$$(a,\ b) = (c,\ d)\ (x,\ y)$$

$$(c,\ d)\ (x,\ y) = (cx - dy,\ dx + cy)$$

$$= (a,\ b)$$

$cx - dy = a,\ dx + cy = b$ ஆகும்

$$(c^2 + d^2)\ x = ac + bd$$

$(c^2 + d^2)\ y = bc - ad$ எனக் காணலாம்

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$

$$y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

எனவே $(a,\ b) / (c,\ d) = \left\{\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right\}$

ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு :

$$(10, 5) / (5, 1) = \left[\frac{50+5}{25+1}, \frac{25-10}{25+1}\right]$$

$$= \left[\frac{55}{26}, \frac{15}{26}\right]$$

8. துணையிய எண்கள் (Conjugates)

$(a + i\,b)$ என்ற கற்பனை எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். $(a - i\,b)$ என்பதை $(a + i\,b)$-ன் துணையிய எண் என்கின்றோம். $(a - i\,b)$-ன் துணையிய எண் $(a + i\,b)$ என்பதைக் கவனிக்க.

$(a + i\,b)(a - i\,b) = a^2 + b^2$ என்பதிலிருந்து இரு துணையிய கற்பனை எண்களின் பெருக்குத் தொகை ஒரு மெய்யெண் எனக் காண்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$5 + 4\,i$ என்பதின் துணையிய எண் $5 - 4\,i$ ஆகும்.

$\therefore \quad (5 + 4\,i)(5 - 4\,i) = 25 + 16 = 41$

9. தனி மதிப்பு (Absolute value)

$(a + i\,b)$ என்ற கற்பனை எண்ணின் தனி மதிப்பினை $|\,a + i\,b\,|$ எனக் குறிப்பது வழக்கம். $A = a + i\,b$ எனக் கொள்வோமாயின், A-ன் தனி மதிப்பு $|\,A\,|$ ஆகும்.

$|\,A\,| = |\,a + i\,b\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ஆகும்.

$A, B, C \ldots X$ என்ற கற்பனை எண்களின் பெருக்கலின் தனி மதிப்பு, ஒவ்வொன்றின் தனி மதிப்புகளின் பெருக்கலுக்குச் சமம்.

அதாவது,

$|\,A \cdot B \cdot C \ldots X\,| = |\,A\,| \cdot |\,B\,| \ldots |\,X\,|$ ஆகும்.

இதிலிருந்து, இரு கற்பனை எண்களின் பெருக்கல் பூச்சியமானல், இரு எண்களில் குறைந்தது ஒன்று பூச்சியமாயிருக்க வேண்டும் என அறிகின்றோம்.

10. பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ என்பது xஐ மாறியாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். மாறிலிகள் $a_0, a_1 \dots a_n$ என்பன கெழுக்கள் (Coefficients) எனவும், $a_0 x^n, a_1 x^{n-1}, \dots a_{n-1} x, a_n$ என்பன பல்லுறுப்புக் கோவையின் உறுப்புகள் எனவும் வழங்கப்படுகின்றன. பல்லுறுப்புக் கோவைகளை நாம் $f(x)$, $\varphi(x)$, $\phi(x)$, $g(x)$ எனக் குறிக்கின்றோம். இங்கு $a_0 \neq 0$ ஆயின்,

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

என்பதனை n–படி விகிதமுறு முழு எண் சமன்பாடு என்கின்றோம்.

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$\varphi(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

என்ற இரு விகிதமுறு முழு எண் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 \dots a_n = b_n$ ஆயின், $f(x) = \varphi(x)$ என்கின்றோம்.

$f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $x = a$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறுதலை $f(a)$ எனக் குறிக்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\varphi(x) = 7x^2 - 9x + 10 \text{ ஆயின்},$$

$$\varphi(4) = 7(4)^2 - 9(4) + 10 = 86$$

$$\varphi(-3) = 7(-3)^2 - 9(-3) + 10 = 94$$

$$\varphi(a) = 7a^2 - 9a + 10$$

$$\varphi(3i) = 7(3i)^2 - 9(3i) + 10$$

$$= 53 - 27i.$$

11. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Polynomials)

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூட்டல், கழித்தல் பற்றி நாம் நன்கு அறிவோம். இங்குப் பெருக்கலைப் பற்றிச் சிறிது தெரிந்து கொள்வோம்.

$f(x) = 9x^2 + 11x - 9$

$\varphi(x) = 3x \; + 12x + 2$

என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எடுத்துக்கொள்வோம்

$$f(x) \times \varphi(x) = (9x^2 + 11x - 9) \times (3x^3 + 12x + 2)$$

$$27x \; + 33x \; - 27x$$

$$+ 108x \; + 132x^2 - 108x$$

$$+ 18x \; + 22x - 18$$

$$27x \; + 33x^4 + 81x^3 + 150x^2 - 86x - 18$$

இந்த எடுத்துக்காட்டு நாம் வழக்கமாகப் பின்பற்றும் முறையை விளக்குகின்றது. இதனையே கெழுக்களைப் பிரித்தல் முறைப்படி (Method of detached coefficients) எளிதில் காணலாம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டு மூலம் எளிதில் இம் முறையை அறியலாம்.

$\varphi(x) \times f(x) = 3 \quad 0 \quad 12 \quad 2 \quad \times \quad 9 \quad 11 \; -9$

27	0	108	18		
	33	0	132	22	
	−27		0	−108	−18
27	33	81	150	−86	−18

$\varphi(x) \times f(x)$

$= 27x^6 + 33x \; + 81x \; + 150x \; - 86x - 18$

12 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x - c)$ஆல் வகுக்கும் பொழுது காணும் மீதியைக் கீழ்க்கண்ட

தேறறததின மூலம எளிதில பெறலாம எனவே, நாம இத தேறறததை மீதித தேறறம எனகினறேம

தேற்றம்

$f(x)$ எனற ஒரு பலலுறுபபுக கோவை $(x - c)$ எனற ஈருறுபபுச சோககையால வகுககபபடும பொழுது காணும மீதி $f(c)$ ஆகும

$(x + a)$ஆல வகுககபபடடால, மீதி $f(-a)$ ஆகும

தெரிபபு

$f(x)$ஐ, $(x - c)$ஆல வகுககும பொழுது கிடைககும ஈவு $\varphi(x)$ எனவும, மீதி R எனவும கொளக

$$f(x) \equiv (x - c)\varphi(x) + R$$

இது ஒரு முறறொருமை எனவே $x = c$ எனப பிரதியிட

$$f(c) = 0 + R$$

$$R = f(c)$$

எனவே $f(x)$ஐ $(x - c)$ ஆல வகுககும பொழுது கிடைககும மீதி $f(c)$-ககுச சமமாகும

$f(x)$ஐ $(x + c)$ ஆல வகுததால

$f(x) \equiv (x + c)\, q(x) + r$ எனக

இஙகு $x = -c$ எனப பிரதியிட,

$$f(-c) = r$$

எனவே $f(x)$ஐ, $(x + c)$ஆல வகுககும பொழுது கிடைககும மீதி $f(-c)$ ஆகும

13 மீதித தேறறததிலிருநது நாம கீழககணடவறறை அறிகினறேம

(1) $f(c) = 0$ ஆனல $(x - c)$ $f(x)$-ன ஒரு சினை அலலது $x = c$ ஒரு தீாவு அலலது மூலம (root) என கினறேம

(ii) $f(-c) = 0$ ஆனால், $(x + c)$ $f(x)$-ன் சினை அல்லது $x = -c$, $f(x)$-ன் ஒரு தீர்வு அல்லது மூலம் என்கின்றோம்.

(iii) $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$ என்க.

$\therefore$ $f(1) = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$. எனவே $f(x)$ என்ற கோவையில் உள்ள கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானால், $f(1) = 0$. அதாவது $(x - 1)$ ஒரு சினையாகும் அல்லது $x = 1$ ஒரு தீர்வாகும்.

(iv) $f(x)$-ல், x-ன் இரட்டைப் படிகள் உள்ள கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையும், ஒற்றைப்படிகள் உள்ள கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையும் சமமாயின்,

$f(-1) = 0$.

அதாவது $(x + 1)$, $f(x)$-ன் ஒரு சினையாகும். இங்கு நாம் x சார்பற்ற மாறிலி p_nஐ இரட்டைப்படிக் கெழு எனக் கொள்கின்றோம்.

14. தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic division)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஓர் ஈருறுப்பால் வகுக்கப்படும் பொழுது உண்டாகும் ஈவையும், மீதியையும் காணல்.

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ஐ $(x - c)$ஆல் வகுத்தால்,

$f(x) \equiv (x - c)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-1}) + R$ ஆகும். ... ... (1)

இங்கு R மீதியாகும்.

$b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ ஈவாகும்.

(1)-ன் இருபுறமுள்ள சமப்படிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$$a_0 = b_0, \qquad \therefore \; b_0 = a_0$$

$$a_1 = b_1 - c\,b_0, \qquad \therefore \; b_1 = a_1 + c\,b_0$$

$a_2 = b_2 - c\,b_1$, $\quad\therefore\quad b_2 = a_2 + c\,b_1$

... ...

... ...

... ...

$a_{n-1} = b_{n-1} - c\,b_{n-2}$, $\quad\therefore\quad b_{n-1} = a_n - c\,b_{n-2}$

$a_n = R - c\,b_{n-1}$, $\quad\therefore\quad R = a_n + c\,b_{n-1}$

மேலே கண்டவற்றிலிருந்து, ஈவிலுள்ள b_0, b_1 ... b_{n-1} என்ற கெழுக்களையும், மீதி Rஐயும் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

c					
	a_0	a_1	a_2	...	a_n
		$c\,b_0$	$c\,b_1$	...	$c\,b_{n-1}$
	b_0	b_1	b_2	...	R

அதாவது $f(x)$ஐ, $(x - c)$ஆல் வகுக்க, முதலில் $f(x)$-ன் கெழுக்களை $(a_0, a_1 \dots a_n)$ வரிசையாக எழுதவும். பின்பு a_0-க்கு நேரே மூன்றும் வரிசையில் b_0 என எழுதவும். பின்பு a_1-க்குக் கீழே $c\,b_0$ என்று எழுதவும். $\therefore\ a_1 + c\,b_0 = b_1$. இதே போல் $c\,b_1$ஐ a_2-க்குக் கீழே எழுதி, $a_2 + c\,b_1 = b_2$ எனப் பெறலாம். இதே முறையைப் பின்பற்ற $R = a_n + c\,b_{n-1}$ எனப் பெறலாம். இம் முறையைத் தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic Division) என்கின்றோம்.

[**குறிப்பு 1 :** $f(x)$ஐ, $(x - c)$ஆல் வகுப்பதற்குப் பதிலாக, $(x + c)$ ஆல் வகுப்பதாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது,

$$f(x) \equiv (x + c) \quad (b_0\,x^{n-1} + b_1\,{}^{n-2} + \dots + b_{n-1}) \quad + \quad R$$

ஆகும்.

அதாவது,

$a_0 = b_0$, $\quad\therefore\quad b_0 = a_0$

$a = b_1 + cb \qquad b_1 = a_1 - cb$

$\qquad\qquad\qquad\quad = a_1 + (-c)\,b$

$a_{-1} = b_{1} + c\,b_{-1} \qquad b_{-} = a_{1} + (-c)\,b_{-2}$

$a = R + c\,b_{-1}, \qquad R = a + (-c)\,b_{-1}$

ஆகவே இஙகு மேலே கூறபபட்ட முறையைப பயனபடுத துமபொழுது முதல வரிசையையும, இரணடாம வரிசை யையும கூட்டுவதறகுப பதிலாக, இரணடாம வரிசையை முதல வரிசையிலிருநது கழிகக வேணடும அல்லது cஐ (— c)யாக மாறறிக கொணடு முனபோல செயயவும

குறிபபு 2 பலலுறுபபுக கோவைகளின பெருககலிலும வகுததலிலும உறுபபுகளின கெழுககளை வரிசையாக எழுதும பொழுது இல்லாத உறுபபுகளுககுப பூசசியததைப பிரதியிட மறநது விடககூடாது]

எடுத்துக்காட்டு 1

$2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x + 1$ ஐ $x + 2$ ஆல வகுதது, ஈவு, மீதியைக காணக

−2	2	−6	7	5	1
		−4	20	−54	98
	2	−10	27	−49	+99

ஈவு $2x^3 - 10x^2 + 27x - 49$

மீதி 99 ஆகும

எடுத்துக்காட்டு 2

$-x + 7x^3 - 4x$ ஐ $x - 3$ஆல வகுதது ஈவு, மீதியைக காணக

3	-1	$+7$	-4	$+0$	$+0$
		-3	$+12$	$+24$	$+72$
	-1	$+4$	$+8$	$+24$	$+72$

ஈவு $-x + 4x + 8x + 24$

மீதி 72 ஆகும

15 ஒரு பலலுறுபபுக கோவையை மறறொரு பலலுறுபபுக கோவையால வகுககுமபொழுது ஈவு மீதி காணல

$g(x) \equiv a\ x + a\ x \quad + \quad + a$

$\varphi(x) = b\ x^{n} + b\ x \quad + \quad + b_{m}-$

எனற இரு பலலுறுபபுக கோவைகளை எடுததுககொளவோம இங்கு $a \neq b$, $b \neq 0$ $n \geq m$ எனக கொளவோம

பொருததமான ஒரு c எனற மாறிலியைக கொணடு

$g(x) - c\ x^{-m}\ \varphi(x) = g_1(x)$

எனற பலலுறுபபுக கோவையைப பெறலாம

இங்கு $g_1(x) \neq 0$ ஆயின அதனபடி $n_1 < n$ ஆக இருககும மறுபடியும c_1 எனற மாறலியுடன, $n_1 \geq m$ ஆக இருககும வரை,

$g_1(x) - c_1 x \quad m\ \ \varphi(x) = g_2(x)$ எனபதைப பெறலாம மறுபடியும $g(x)$ னபடி $n_2 < n$ எனக $n_2 \geq m$ ஆக இருககுமாயின மேலே கூறியபடி திருமபவும

$g_2(x) - c\ x \quad \varphi(x) = g(x)$ எனப பெறலாம

இவவாறு $g(x)$, $g(x)$ கணடு பிடிததுக கொணடே போவோமேயாறுல, இவறறினபடி குறையுந தொடாசசி

யாக அமையும் (Decreasing Sequence). இவ்வாறு கிடைக்கும் தொடர்ச்சியில் $g_{k+1}(x)$ என்பது பூச்சியமாக அல்லது அதன் படி $n_{k+1} < m$ ஆக இருக்கும். மேலே கண்டவற்றில் உள்ள $g_1(x)$, $g_2(x) \ldots g_{k+1}(x)$-களை நீக்குவதற்கு,

$$g(x) - c_0 x^{n-m} \varphi(x) = g_1(x)$$

$$g_1(x) - c_1 x^{m-n} \varphi(x) = g_2(x)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$g_k(x) - c_k x^{n_{k-m}} \varphi(x) = g_{k+1}(x)$$

என்பவற்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n_1-m} + \ldots\ldots \quad \ldots\ldots + c_k x^{n_{k-m}} = q(x),$$

$g_{k+1}(x) = r(x)$ எனக் கொள்வோமாயின், $g(x) = q(x)\varphi(x) + r(x)$ எனப் பெறப்படும்.

இங்கு $r(x)$-ன்படி mஐ விடக் குறைந்ததாகும். $q(x)$-ம், $r(x)$-ம் முறையே ஈவு, மீதி என வழங்கப்படுகின்றன.

16. மேலே கண்ட முறையை மேற்கொள்வது கடினமாகையால், கெழுக்களைப் பிரித்தல் முறைப்படி காணலாம். இம்முறையின் பயனைக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் எளிதில் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$3x^5 - 4x^3 - 2x + 5$ ஐ $x^3 + x^2 - 4x - 3$ ஆல் வகுத்து ஈவு, மீதியைக் காண்க.

3 + 0 − 4 + 0 − 2 + 5	1 1 − 4 − 3.
3 3 − 12 − 9	3 − 3 11
	ஈவு

− 3 + 8 + 9 − 2

− 3 − 3 + 12 + 9

+ 11 − 3 − 11 + 5

11 11 − 44 − 33

14 + 33 38 மீதி

∴ ஈவு: $3x^3 - 3x^2 + 11x$

மீதி: $14x^2 + 33x + 38$.

எடுத்துக்காட்டு :

கெழுக்களைப் பிரித்தல் முறைப்படி $x^5 - 3x^3 + 6x - 1$ஐ $x^2 + x + 1$ஆல் வகுக்க.

1 0 0 − 3 6 − 1	1 1 1
1 1 1	1 − 1 0 − 2
	ஈவு.

−1 −1 −3

−1 −1 −1

0 −2 +6

0 0 0

− 2 +6 − 1

− 2 −2 − 2

8 + 1 மீதி

∴ ஈவு: $x^3 - x^2 - 2$

மீதி : $8x + 1$.

பயிற்சி

(1) கீழ்க் கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குக :

(i) $x - x + 1$ ஐ $x + x + 1$ ஆல்

(ii) $x + x - 2x + 3$ ஐ $2x - 3x + 4x - 1$ ஆல்

(iii) $2x - 3x + x - 1$ ஐ $x + 3x - 1$ ஆல்

(iv) $x + x - 5x - 2$ ஐ $x - 4x \quad 5x - 2$ ஆல்

(v) $x - 3x + x - x + 1$ ஐ $3x + 7x - x + 1$ ஆல்

(2) கீழ்க்கண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கெழுக்களைப் பிரித்தல் முறைப்படி வகுக்க

(i) $x^8 + x^7 + 3x - 1$ ஐ $x - 3x + 4x + 1$ ஆல்

(ii) $x + 3x^6 - 2x - x + 1$ ஐ $x^4 - x + 1$ ஆல்

(iii) $2x^7 - 3x^6 + x - 3x + 5x - 4x + 2x - 1$ ஐ
$2x - 3x + x - 1$ ஆல்

(iv) $15x - 16x^6 + 30 - 3x - 5x - 2x^3 + 5x + 7$ ஐ
$x^2 - x + 1$ ஆல்

(v) $x + x^5 + 1$ ஐ $x + x + 1$ ஆல்

விடை

(1) (i) $x + x^2 + 1$

(ii) $2x^9 - 3x^8 + 6x^7 - 7x^6 + 9x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 3$

(iii) $2x^7 + 3x^6 - 9x - x + 5x - 3x^2 - x + 1$

(iv) $x^8 - 26x^6 + 21x^4 + 20x^2 + 4$

(v) $3x^8 - 2x^7 - 19x^6 + 11x - 7x - 3x + 8x - 2x + 1$

(2) (i) ஈவு $x + 4x + 12x^2 + 32x + 82$

மீதி $194x - 140x - 360x - 83$

(ii) ஈவு $x + 3x + 1$

(iii) ஈவு $x - x + 1$

(iv) ஈவு $15x - x + 14x + 12x - 7x - 21$

மீதி $-9x + 28$

(v) ஈவு $x - x + x - x + x^{6} - x + 1$

17 இரு பலலுறுபபுக கோவைகளின மிகப பெரிய பொதுக காரணியைக காணல (To find the Highest Common Divisor of two Polynomials)

ஏதேனும இரு பலலுறுபபுக கோவைகள மறறொரு கோவையால வகுபடுமானால, அக கோவையைக கொடுககபபடட இரு பலலுறுபபுக கோவைகளின பொதுக காரணி (Common divisor) எனகினறோம இவவாறு கொடுககபபடட இரு பலலுறுபபுக கோவைகளுககுப பல பொதுககாரணிகளைக காணலாம அவறறில மிகபபெரிய பொதுக காரணியைக காணபது எனபதனை இஙகுக காணபோம

$\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ எனற இரு பலலுறுபபுக கோவைகளை எடுததுக கொளவோம $\varphi(x)$ஐ $\varphi_1(x)$ ஆல வகுககும பொழுது கிடைககும ஈவு $q_1(x)$ மீதி $\varphi_2(x)$ எனக

$\varphi(x) = q_1(x)\,\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ ஆகும $\varphi_2(x) \neq 0$ ஆயின $\varphi(x)$ ஐ, $\varphi(x)$ ஆல வகுககலாம அபபொழுது பெறபபடும ஈவு $q_2(x)$, மீதி $\varphi_3(x)$ எனக

$$\varphi_1(x) = \varphi(x)\, q(x) + \varphi(x)$$

மறுபடியும, முனபோல $\varphi(x) \neq 0$ ஆயின $\varphi_2(x)$ஐ, $\varphi_3(x)$ ஆல வகுககும பொழுது,

$\varphi(x) = \varphi_3(x)\, q(x) + \varphi_4(x)$ எனப பெறலாம இவவாறே வகுததுக கொணடே போனால

$$\varphi(x) = \varphi(x)\, q_1(x) + \varphi(x)$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x)\, q_2(x) + \varphi_3(x)$$

$$\varphi_{r-2}(x) = \varphi_{r-1}(x)\, q_{r-1}(x) + \varphi_r(x)$$
$$\varphi_{r-1}(x) = \varphi_r(x)\, q_r(x)$$

எனப் பெறலாம்.

இதிலிருந்து நாம் காண்பது $\varphi_r(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$-ன் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணி என்பதாகும். இது எப்படி என்பதனைச் சற்று விரிவாகப் பார்ப்போம்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முற்றொருமைகளிலிருந்து (Identities) $\varphi_r(x)$, $\varphi_{r-1}(x)$ ஐ வகுக்கின்றது எனக் காண்கின்றோம்.

$\therefore$ $\varphi_{r-2}(x) = \varphi_{r-1}(x)\, q_{r-1}(x) + \varphi_r(x)$ என்பதிலிருந்து, $\varphi_r(x)$, $\varphi_{r-2}(x)$-ம் வகுக்கின்றது என அறிகின்றோம். $\varphi_r(x)$, $\varphi_{r-1}(x)$, $\varphi_{r-2}(x)$ஐ வகுக்குமாதலால்,

$\varphi_{r-3}(x) = \varphi_{r-2}(x)\; q_{r-2}(x) + \varphi_{r-1}(x)$ என்பதிலிருந்து, $\varphi_r(x)$, $\varphi_{r-3}(x)$-ம் வகுக்கும் என்பது தெளிவு. இவ்வாறே தொடர்ந்து காண்போமேயானால், $\varphi_r(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$-ம் வகுக்கின்றது என்பது தெளிவு.

அடுத்தபடியாக பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் எந்தப் பொதுக் காரணியும் $\varphi_r(x)$ஐ வகுக்கும் என்பதைக் காண்போம்.

$f(x)$ ஆனது $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ ஐ வகுக்கின்றது எனக் கொள்வோமாயின்,

$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)\; q_1(x)$ என்பதிலிருந்து, $f(x)$, $\varphi_2(x)$-ம் வகுக்கின்றது என அறிகின்றோம். மறுபடியும்,

$\varphi_3(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)\; q_2(x)$ என்பதிலிருந்து, $f(x)$, $\varphi_3(x)$-ம் வகுக்கும் எனக் காண்கிறோம். இதேபோல் பார்ப்போமேயானால், $f(x)$, $\varphi_r(x)$-ம் வகுக்கும் எனக் காணலாம். மேலே கண்டவாறு, ஒவ்வொரு முற்றொருமையின் பொதுக் காரணியானது $\varphi_r(x)$ஐ வகுக்குமாதலால், $\varphi_r(x)$ ஐத் தவிர மற்ற காரணிகளின்படி, $\varphi_r(x)$-ன் படியைவிட அதிகமாக இருக்காது என்பது தெளிவு: ஆகவே, $\varphi_r(x)$, கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியாகும்.

இதனைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் நன்கறியலாம்.

எடுத்துகாட்டு 1:

$$g = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$$

$g_1 = x^3 - 3x - 2$ ஆயின்,

g, g_1–ன் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியைக் காண்க.

முதலில் gஐ g_1 ஆல் வகுக்க.

1	0	−6	−8	−3		1	0	−3	2
1	0	−3	−2			1	0		
	0	−3	−6	−3					
	0	0	0	0					
		−3	−6	−3					

∴ மீதி $-3x^2 - 6x - 3$ ஆகும்.

இதனை −3ஆல் வகுத்து $g_2 = x^2 + 2x + 1$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது g_1ஐ g_2 ஆல் வகுக்க,

1	0	−3	−2		1	2	1
1	2	1			1	−2	
	−2	−4	−2				
	−2	−4	−4				
	0	0	0				

இதில் மீதி பூச்சியமாதலால், g_2, g, g_1-ன் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியாகும். அதாவது g, g_1-னின் மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி $x^2 + 2x+1$ அல்லது $(x+1)^2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$g = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$$g_1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

இவற்றின் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியைக் காண்க.

gஐ, g_1ஆல் வகுக்க

2	2	—3	—2	1	1	2	2	1
2	4	4	2		2	—2		
	—2	—7	—4	1				
	—2	—4	—4	—2				
		—3	0	3				

இங்கு $g_2 = -x^2+1$ ஆகும் (3ஆல் வகுத்தபிறகு).

g_1ஐ, g_2ஆல் வகுக்க.

1	2	2	1	—1	0	1
1	0	—1		—1	—2	
	2	3	1			
	2	0	—2			
		3	3			

இங்கு $g_3 = x+1$.

g_2 ஐ, g_3ஆல் வகுக்க.

−1	0	1	1	1
−1	−1		−1	+1
	1	1		
	1	1		
		0		

இங்கு மீதி பூச்சியமாதலால், கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளின் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணி g_3 ஆகும். அதாவது மிகப் பெரிய பொதுக் காரணி $(x+1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$$g = x^5 - x^4 - 2x + 2x^2\ x - 1$$

$$g_1 = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$$

இவற்றின் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியைக் காண்க.

இங்கு முதலில் gஐ 5ஆல் பெருக்கிக் கொண்டு, gஐ, g_1ஆல் வகுக்கவும்.

	5	−5	−10	+10	+5	−5	5 −4 −6 +4 1
	5	−4	−6	+4	+1		
		−1	−4	6	4	−5	1 −1
5 ஆல் பெருக்க,		−5	−20	30	20	−25	
		−5	+4	6	−4	−1	
			−24	24	24	−24	

இதனை 24ஆல் வகுக்க,

$g_2 = x^3 - x^2 - x + 1$

g_1 ஐ, g_2ஆல் வகுக்க,

| 5 −4 −6 +4 +1 | 1 −1 −1 +1

| 5 −5 −5 5 |

———————————————— | 5 1

1 −1 −1 +1 |

1 −1 −1 +1

————————

0

————————

இங்கு மீதி பூச்சியமாதலால், g_2 ஆனது, g, g_1-ன் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியாகும். அதாவது $(x^3 - x^2 - x + 1)$ தான், g, g_1-ன் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியாகும்.

பயிற்சி

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியைக் காண்க:

(1) $g = 2x^5 + 4x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$

$g_1 = 6x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1$

(2) $g = 2x^6 + 3x^5 + x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 4x + 5$

$g_1 = x^4 - x^3 - x - 1$

(3) $g = 10x^4 - 9x^5 - 12x^4 + 2x^2 - x - 1$

$g_1 = 4x^5 + x^4 - 7x^3 - 8x^2 - x + 1$

(4) $g = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

$g_1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$

(5) $g = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

$g_1 = 4x^3 - 18x + 4.$

விடை

(1) $2x^2 - 2x + 1$

(2) $x^2 + 1$

(3) $x^2 - x - 1$

(4) $x^2 + 3x + 2$

(5) $(x - 2)$

2. சமன்பாட்டின் பொதுவான இயல்புகள்

(General Properties of Equations)

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ என்ற ஒரு n படிக்கோவையில், n ஒரு முழு எண்ணாகவும், $a_0, a_1 \dots a_n$ என்பன மாறிலிகளாகவும், $a_0 \neq 0$ ஆயின், $f(x) = 0$ என்பது ஓர் அளவிற்கிணங்கிய n படிச் சமன்பாடு எனப்படும் (Algebraic equation of degree).

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் a_0ஆல் வகுப்பதினுல், சமன்பாட்டின் தன்மை மாருது. ஆகவே,

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ என எழுதலாம்.

ஏற்கெனவே மீதித் தேற்றத்தின்படி $f(x) = 0$ என்பதில், $f(a) = 0$ ஆனுல், 'a' $f(x)$-ன் மூலமாகும் அல்லது $(x - a)$, $f(x)$-ன் காரணியாகும் எனப் பார்த்தோம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சமன்பாட்டை வரைப்படத்தின் மூலம் குறிப்பது எவ்வாறு என நாம் நன்கறிவோம். இதனைத் துணையாகக் கொண்டு சில தேற்றங்களை இங்குக் காண்போம். இதற்கு முன்பு சமன்பாட்டின் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் காண்போம்.

1. அடிப்படைத் தேற்றம் (Fundamental Theorem)

சமன்பாடு ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு மூலம் அல்லது தீர்வு உண்டு. அது மெய்யெண்ணுகவோ அல்லது கற்பனை எண்ணுகவோ இருக்கலாம்.

இக் கூற்றினை அடிப்படையாகக் கொண்டுதான், நாம் சமன்பாட்டுக் கொள்கையைப் பயில்கின்றோம்.

இத் தேற்றத்தைப் பலர் நிறுவியுள்ளனர். ஆனால் எந்த நிரூபணமும் நாம் இங்குப் பார்த்தறியும் அளவிற்கு எளிதானதாக இல்லையாதலால், நிரூபணத்தைக் கொடுக்காது தேற்றத்தை ஏற்றுக் கொள்வோம்.

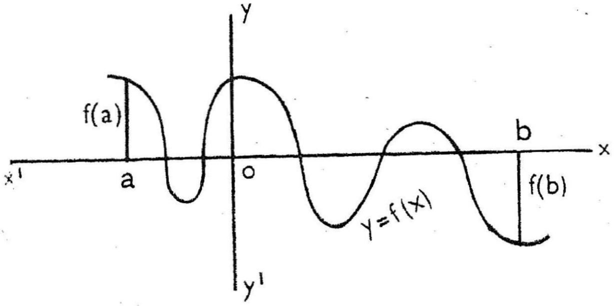
மேற்கூறிய தேற்றத்தின்படி, ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள மெய்யெண் மூலங்களைக் காண கீழ்க்கண்ட தேற்றங்கள் உறுதுணையாக இருக்கும்.

2. தேற்றம்

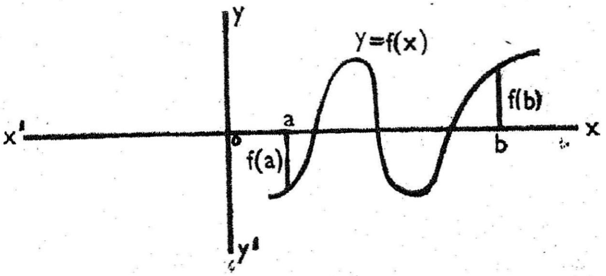
$f(x)$ என்ற கோவையில், x-க்குப் பதிலாக a, b என்ற இரு மெய்யெண்களைப் பிரதியிடும் பொழுது கிடைக்கும் $f(a)$, $f(b)$ மாறுபட்ட குறிகளையுடையதாயின், $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள தீர்வுகளில் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு a, b-களுக்கு இடையில் இருக்கும்.

இங்கு $f(x) = 0$ என்பது ஒரு தொடர் சமன்பாடு (Continuous equation) என்பதை நினைவு கொள்ள வேண்டும். $f(x) = 0$ என்பதின் வரைப்படத்தை வரையும்பொழுது, $x = a$-லிருந்து, $x = b$-க்கு மாறும் பொழுது, வரைப் படமானது (a, b)-க்கு இடையில் அமையும் எல்லா மதிப்புகளையும் பெறும் என்பதைக் காண்கின்றோம். ஆனால் $f(a)$-ம், $f(b)$-ம் வேறு வேறு குறிகளைக் கொண்டிருப்பின், a-க்கும், b-க்குமிடையில் பூச்சியமும் $f(x)$-ன் மதிப்பாக அமையும். அதாவது a, b-க் கிடையில், x-ன் ஏதாவதொரு மதிப்பிற்கு $f(x) = 0$ என அமையும். இதனை வரைப்படத்தின் மூலமாகக் கூறுவோமானால், $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைப்படம் $y = f(a)$, $y = f(b)$-க்கிடையில் X அச்சினைக் குறைந்தது ஒரு முறையாவது சந்திக்கும். எங்கு வரைப்படம் X அச்சினைச் சந்திக்கின்றதோ அப் புள்ளியின் மதிப்பு $f(x) = 0$ என்பதின் மெய்யெண் மூலமாகும். மேலே கூறியவற்றைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைப்படத்தின் மூலம் நன்கறியலாம். $x = a'$ $x, = b$-க்கு இடையில் $y = f(x)$, X அச்சினை ஒரு புள்ளிக்கு மேலும் சந்திக்கும் என்பதைக் கவனிக்கவும். அவ்வாறு சந்திக்கும்

புள்ளிகள் ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையாகும் என்பதையும் கவனிக்க.



படம்-1.



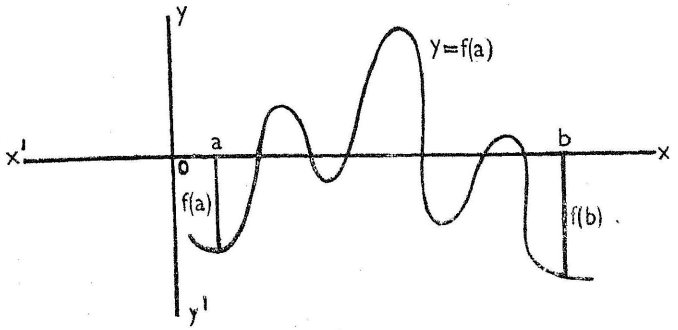
படம்-2.

3. $f(a)$, $f(b)$-ன் குறிகள் ஒரே மாதிரியிருப்பின், a, b-க்கு இடையில் தீர்வுகள் இல்லாமலிருக்கும் அல்லது தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாக இருக்கும்.

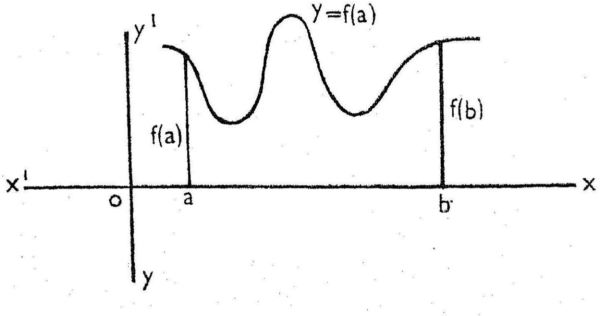
இதனை எளிதாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளதிலிருந்து அறியலாம். அதாவது $f(a)$, $f(b)$–ன் குறிகள் ஒரே மாதிரி யிருப்பின், $y = f(x)$–ன் வரைப்படம் a-க்கும், b-க்குமிடையில் X அச்சினைச் சந்திக்காது அல்லது சந்திக்கும் புள்ளிகள் இரட்டைப்படை எண்ணிக்கையாக இருக்கும்.

மேலே கூறப்பட்டவற்றிலிருந்து நாம் பின்வருவனவற்றை அறிகின்றோம்.

(i) $f(a), f(b)$-ன் குறிகள் மாறுபட்டதாயின், $f(x) = 0$ என்பதின் தீர்வுகளில் ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் a, b-க்கு இடையில் காணப்படும்.



படம்-3.



படம்-4.

(ii) $f(a)$, $f(b)$ ஒரே குறியுடையதாயின், a, b-க்கிடையில் தீர்வுகள் ஏதும் அமையாது அல்லது இரட்டைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் காணப்படும்.

4. ஒவ்வோர் ஒற்றைப் படைச் சார்புக்கும் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு. அத் தீர்வின் குறி இறுதி உறுப்பின் குறிக்கு எதிரானதாக இருக்கும்.

(Every equation of an odd degree has at least one real root of sign opposite to that of its last term.)

இதன் நிறுவனம் 2,3-லிருந்து தெளிவாக விளங்கும். $f(x)$ என்ற கோவையில், x-க்கு $-\infty$, α இவற்றைப் பிரதியிட, $f(x)$ ஓர் ஒற்றைப் படைச் சார்பென்பதினால் கீழ்க் கண்டவற்றைக் காண்கின்றோம்.

$x = -\infty$ ஆனால், $f(x)$-ன் குறி $(-)$ ஆகும். [n ஒற்றைப் படை எண்ணாகையால்.]

$x = 0$ ஆனால், $f(x)$-ன் குறி இறுதி உறுப்பைச் சார்ந்துள்ளது. அதாவது a_nஐச் சார்ந்துள்ளது.

$x = \infty$ ஆனால், $f(x)$-ன் குறி $(+)$ ஆகும்.

a_n-ன் குறி $+$ ஆயின், கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு, $-\infty$-க்கும், 0-க்குமிடையில் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு இருக்க வேண்டும். a_n-னின் குறி $(-)$ ஆயின் 0-க்கும், ∞-க்குமிடையில் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு. ஆகவே, தேற்றம் உண்மை.

5. இறுதி உறுப்பின் குறி எதிராக உள்ள ஒவ்வோர் இரட்டைப் படிச் சார்புக்கும் குறைந்தது ஒரு நேர் எண் தீர்வும், ஓர் எதிர் எண் தீர்வுமாக இரு தீர்வுகள் உண்டு. (Every equation of even degree whose last term is negative, has at least two roots of opposite signs.)

இத் தேற்றத்தையும் x-க்குப் பதிலாக $-\infty, 0, \infty$ஐப் பிரதியிடுவதின் மூலம் நிறுவலாம்.

$f(x)$-ல், $x = -\infty$ ஆயின், $f(x)$-ன் குறி $(+)$;

$x = 0$ ஆயின், $f(x)$-ன் குறி $(-)$.

[இறுதி உறுப்பின் குறி $(-)$ ஆதலால்],

$x = \infty$ ஆயின், $f(x)$-ன் குறி $(+)$.

எனவே நாம் ஏற்கெனவே கண்ட உண்மையின்படி, $f(x)$-க்குக் குறைந்தது $-\infty$, 0-க்கிடையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வும், 0, ∞-க்கிடையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வும் உண்டு. அதாவது மாறுபட்ட குறியுடைய இரு மெய்யெண் தீர்வு -ண்டு. எனவே, தேற்றம் உண்மை.

6. கற்பனைத் தீர்வுகள் (Imaginary Roots)

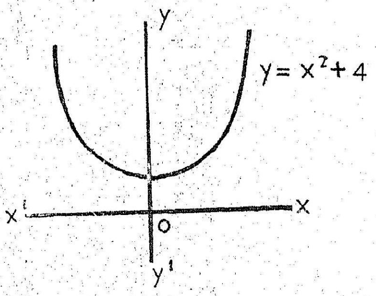
இதுவரை பொதுவாக எல்லாச் சமன்பாடுகளையும், அவற்றின் தீர்வுகளின் தன்மைகளையும் சிறிது அறிந்தோம். ஆனால், இறுதி உறுப்பின் குறி நேராக உள்ள இரட்டைப்படிச் சார்பின் தன்மையை ஆராயவில்லை. இம் மாதிரி சார்புகளுக்கு மெய்யெண் தீர்வுகள் இல்லாமலேயும் இருக்கலாம். எனில், அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி, இம் மாதிரி சார்புகளுக்குள்ள தீர்வை ஆராய வேண்டும். இம்மாதிரியான சார்புகளுக்குள்ள தீர்வுகளை நாம் 'கற்பனைத் தீர்வுகள்' என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$f(x) = x^2 + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை ஆராய்வோம். இது நேர் தனி உறுப்புடைய (Positive absolute term—here last term) இரட்டைப்படிச் சார்பாகும்.

இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மெய்யெண் தீர்வுகள் அல்ல. அதாவது மெய்யெண்களை x-க்குப் பதிலாகப் பிரதியிட $f(x) \neq 0$. ஆனல், $x = 2\sqrt{-1} = 2i$ எனப் பிரதியிட $f(x) = 0$ ஆகின்றது. அதாவது $f(x)$-ன் தீர்வுகளில் ஒன்று $2i$ ஆகும். $f(x)$-ன் மற்றொரு தீர்வு $-2i$ ஆகும். இதன் விவரங்களைப் பின்பு காண்போம்.

$f(x) = x^2 + 4$ என்பதற்கான வரைப்படத்தை நோக்கும் பொழுது, x-ன் எந்த மெய்யெண் மதிப்பிற்கும், $f(x) \neq 0$ என்பது வரைப்படம் X அச்சினைத் தொடாததிலிருந்து தெளிவாகும்.



படம்-5.

ஒவ்வொரு கூட்டு முழு எண்படி கொண்ட அளவிற்கிணங்கிய சமன்பாடுகளுக்கு $a + ib$ என்ற வடிவில் தீர்வுகள் உள்

என. a, b திட்டமான மெய்யெண்களாகும். சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மெய்யெண்களாயின், $b = 0$.

7. தேற்றம்

ஒவ்வோர் அளவுக்கிணங்கிய n படிச் சமன்பாட்டிற்கும் சரியாக n தீர்வுகள் மட்டுமே உள்ளன.

நிறுவல் :

$f(x) = 0$ என்பது ஓர் அளவுக்கிணங்கிய n படிச் சமன்பாடாகட்டும்.

அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு உண்டு. அதனை α_1 என்க.

$\therefore \quad (x - \alpha_1)$ என்பது $f(x)$-ன் ஒரு காரணியாகும்.

$\therefore \quad f(x) \equiv (x - \alpha_1) \; \varphi_{n-1}(x)$ என எழுதலாம்.

$\varphi_{n-1}(x)$ என்பது $(n - 1)$ படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

$\therefore \quad \varphi_{n-1}(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு உண்டு. அதனை α_2 என்க.

$\therefore \quad \varphi_{n-1}(x) = (x - \alpha_2) \, \varphi_{n-2}(x)$ என எழுதலாம்.

அதாவது $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \, \varphi_{n-2}(x)$ $\varphi_{n-2}(x)$ என்பது $(n-2)$ படிபல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

$\therefore \quad \varphi_{n-2}(x) = 0$ என்ற சமன் பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு உண்டு. அதனை α_3 என்க.

$\therefore \quad f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \quad \varphi_{n-3}(x)$ என எழுதலாம்.

இந்த முறையைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்தினால்,

$f(x) = (x - \alpha_1) \quad (x - \alpha_2) \quad \ldots \quad (x - \alpha_n) \, \varphi_0(x)$ எனப்பெறப்படும்.

$\varphi_0(x)$-ன்படி பூச்சியமாகும்.

$\therefore \varphi_o(x)$ என்பது ஒருமாறிலி. இதனை k என்று கொள்வோம்.

$$\therefore f(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \quad \dots \quad (x - \alpha_n)$$

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \quad \dots \dots \quad + p_{n-1} x + p_n$ எனக் கொள்வோமாயின், $k = 1$ ஆகும்.

இங்கு x-க்கு $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ என்ற n மதிப்புகள் தவிர வேறு மதிப்புகளைக் கொடுத்தாலும், $f(x)$ பூச்சியமாகாது. எனவே $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு n தீர்வுகளே உள்ளன. அவை $\alpha_1, \alpha_2, \quad \dots \quad \alpha_n$ ஆகும்.

[**குறிப்பு :** மேலே கண்ட n தீர்வுகளில் 'a' தீர்வுகள் 'α' வுக்கும், 'b' தீர்வுகள் 'β'வுக்கும் சமமாயின்,

$f(x) = (x - \alpha)^a (x - \beta)^b \phi(x)$ என எழுதலாம். $\phi(x)$-ன் படி $(n - a - b)$ ஆகும். இங்கு α, β முறையே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் 'a' முறை 'b' முறை மடங்குத் தீர்வுகளாகும் (Multiple roots).]

8. தேற்றம் : முற்றொருமைத் தேற்றம் (Identity Theorem):

$g(x)$, $g_1(x)$ என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படி nஐ விடக் குறைவாகவும், ஆனால் x-ன், $m > n$ மதிப்புகளுக்கு இரு கோவைகளும் சமமாகவும் இருப்பின், அவ்விரு கோவைகளும் முற்றொருமைகளாகும்.

நிறுவல் :

இத் தேற்றத்தின் நிறுவல் ஒவ்வொரு n படிச் சமன்பாட்டிற்கும் n தீர்வுகளே உள்ளன என்ற தேற்றத்தைத் தழுவியதாகும்.

$a_1, a_2, a_3, \dots a_m$ என்ற $m\ (m > n)$ வேறு வேறு மதிப்புகளுக்கு $g(x) = g_1(x)$ என்க.

அதாவது,

$$g(a_1) = g_1(a_1),\ g(a_2) = g_1(a_2) \dots \dots g(a_m) = g_1(a_m) \text{ ஆகும்.}$$

$F(x) = g(x) - g_1(x)$ என்பது முழுதும் ஒத்து மறையா பல்லுறுப்புக் கோவை (not identically vanishing polynomial) என்க. $F(x)$-ன் படி nஐ விடக் குறைவாகும்.

எனினும் $x = a_1, a_2, \ldots a_m$ என்ற வேறு வேறு m மதிப்புகளுக்கு $F(x) = 0$. அதாவது $F(x)$-ன் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை m ஆகும். ஆனல் $m > n$. ஆகவே $F(x)$-ன் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை, அதன் படியை விட அதிகமாகின்றது. இது மாருன கருத்தாகும். ஆகவே, $F(x)$ முழுதும் ஒத்து மறையும் கோவையாகும். அதாவது $g(x)$, $g_1(x)$ ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் முற்றொருமையாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

a, b, c, நேர் மெய்யெண்களாயின்,

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = \frac{1}{x}\text{-ன் தீர்வுகள்}$$

மெய்யெண்கள் என நிரூபி.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = \frac{1}{x}$$

அதாவது

$$x(x-b)(x-c) + x(x-a)(x-c) + x(x-a)(x-b)$$
$$-(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$
$$= F(x) \text{ என்க.}$$

$$F(a) = a(a-b)(a-c)$$
$$F(b) = b(b-a)(b-c)$$
$$F(c) = b(c-a)(c-b)$$

a, b, c நேர் மெய் யெண்களாதலால், $a > b > c$ எனக் கொள்வோம். எனவே $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$ நேர் எண்கள்.

$$\therefore\ F(a) = +$$
$$F(b) = -$$
$$F(c) = +$$

இதிலிருந்து குறைந்தது a-க்கும், b-க்குமிடையிலும், b-க்கும், c-க்கு மிடையிலும் ஒவ்வொரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டென்பது தெளிவு. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகை

யால், சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் இரண்டும் மெய்யெண்கள் என்பது தெளிவு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β, γ என்பன $(x-a)(x-b)(x-c)+d=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாயின்,

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)-d=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் a, b, c என நிறுவுக.

α, β, γ, $(x-a)(x-b)(x-c)+d=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாதலால்,

$$(x-a)(x-b)(x-c)+d \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)-d \equiv (x-a)(x-b)(x-c)$$

$\therefore \quad a, b, c$ என்பன

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)-d=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி

(1) $x^3+3px+q$ என்ற கோவையின் ஒரு காரணி $x^2-2ax+a^2$ என்ருல், $q^2+4p^3=0$ என நிறுவுக.

(2) $a<b<c<d$ ஆனுல், k-ன் எந்த மதிப்பிற்கும்

$$(x-a)(x-c)=k(x-b)(x-d)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மெய்யெண்கள் என நிறுவுக.

(3) $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்பன

$(a_1-x)(a_2-x)\ldots\ldots(a_n-x)+k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனில், $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பன $(x_1-x)(x_2-x)\ldots\ldots(x_n-x)-k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(4) $a > b > c$ எனும்படி a, b, c நேர் மெய்யெண்களாயின்,

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{3}{x}$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மெய்யெண்கள் என நிறுவுக.

சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளது தன்மைகள் (Properties of the roots of Equations)

9. சமன்பாடு

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots p_{n-1} x + p_n = 0.$$

என்பதின் கெழுக்கள் $p_1, p_2 \dots p_n$ முழு எண்களானால், இச் சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கிணங்கிய தீர்வுகள் இருப்பின், அவை முழு எண்களாயிருக்கும். அத் தீர்வுகள் p_n-ன் காரணிகளாகவும் இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு $\frac{a}{b}$ என்ற தீர்வு இருப்பதாகக் கொள்வோம். இங்கு a-ம் b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனவே,

$$\frac{a^n}{b^n} + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} p_1 + \dots + p_{n-1} \frac{a}{b} + p_n = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இரு பக்கங்களையும் b^{n-1} ஆல் வகுக்க,

$$\frac{a^n}{b} + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} b + \dots + p_{n-1} a b^{n-2} + p_n b^{n-1} = 0$$

எனப் பெறப்படும்.

இங்கு $p_1\ p_2 \dots p_n, a, b$ யாவும் முழு எண்களாகும். எனவே $p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} b + \dots + p_n b^{n-1}$ ஒரு முழு எண்ணாகும். a, b ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானதால், $\frac{a^n}{b}$ ஒரு பின்னமாகும்.

அதாவது,

பின்னம் + முழு எண் = 0 எனக் காண்கின்றோம்.

ஆனால் இது முரணானது. எனவே, நாம் எடுத்துக் கொண்டபடி $\frac{a}{b}$ போன்ற பின்னங்கள் கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டின் தீர்வாக இருத்தல் இயலாது. எனவே, சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் முழு எண்களாகும்.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்று α எனக் கொள்வோம் இங்கு α ஒரு முழு எண்.

எனவே

$\alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}\alpha+p_n=0$ ஆகும்.

இருபக்கமும் α ஆல் வகுக்க,

$$\alpha^{n-1}+p_1\alpha^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}+\frac{p^n}{\alpha}=0.$$

இங்கு $\alpha^{n-1}+p_1\alpha^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}$ ஒரு முழு எண்.

$\therefore$ முழு எண் $+\frac{p_n}{\alpha}=0$

$\therefore \frac{p_n}{\alpha}$ ஒரு முழு எண். அதாவது α ஆனது p_n ஐ மீதமில்லாமல் வகுக்கவேண்டும். அதாவது α, p_n-ன் ஒரு காரணியாகும்.

10. அளவுக்கிணங்கிய கெழுக்கள் உள்ள ஒரு சமன்பாட்டில் இருபடி மூலத் தீர்வுகள் துணையிய மூலங்களாகவே தோன்றும் (In an equation with rational co-efficients, the roots which are Quadratic surds occur in their conjugate pairs.)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $f(x)\equiv 0$ என்க. $f(x)=0$-ன் ஒரு மூலம் $a+\sqrt{b}$ $(b\neq 0)$ எனின் அதன் துணையிய படிமூலமாகிய $a-\sqrt{b}$-ம் $f(x)=0$-ன் தீர்வு என நிறுவவேண்டும்.

$$(x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b})=(x-a)^2-b$$

$f(x)$ ஐ $(x-a)^2-b$ ஆல் வகுக்கும் பொழுது ஈவு $g(x)$, மீதி $Ax+B$ எனவும் கொள்க.

$\therefore f(x) = [(x-a)^2 - b]\, g(x) + Ax + B$

$f(a + \sqrt{b}) = 0 \quad \therefore x = a + \sqrt{b}$ எனப் பிரதியிட,

$0 = A(a + \sqrt{b}) + B$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore \quad Aa + A\sqrt{b} + B = 0$

அதாவது $\quad Aa + B = 0$

$A\sqrt{b} = 0$ ஆகும்.

[$\therefore \quad a + \sqrt{b} = 0$ எனின், $a = 0, b = 0$ ஆகும்.]

$b \neq 0. \therefore \sqrt{b} \neq 0$

$\therefore \quad A\sqrt{b} = 0$ என்பதில்

$A = 0$

எனவே, $Aa + B = 0$ என்பதில்

$B = 0$ எனக் காண்கிறோம்.

$\therefore \quad f(x) = [(x-a)^2 - b]\, g(x)$ ஆகும்.

எனவே $f(x)$-ன் தீர்வு $(a - \sqrt{b})$ என்பது தெளிவாகும்.

11. மெய்யெண் கெழுக்களுடைய, சமன்பாட்டின் கற்பனைத் தீர்வுகள், துணையிய கற்பனை எண்களாகத் தோன்றும் (Imaiginary roots of an equation with real coefficients occur in their conjugate pairs.)

இதனுடைய தெரிப்பும் மேலே கண்டது போலவேதான்.

$\alpha + i\beta$ என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டுன் தீர்வு எனின், $(\alpha - i\beta)$ - வும் $f(x) = 0$ என்று கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

$(\alpha + i\beta)(\alpha + i\beta) = \alpha^2 + \beta^2$

$\therefore (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$

$f(x)$ ஐ $(x-\alpha)^2+\beta^2$ ஆல் வகுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் ஈவு $g(x)$, மீதி $Ax+B$ என்க.

$$\therefore f(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]\, g(x) + Ax + B$$

$$f(\alpha+i\beta) = 0$$

$$\therefore 0 = A(\alpha+i\beta)+B$$

$$\therefore A\alpha + B = 0$$

$$iA\beta = 0$$

$$\beta \neq 0 \qquad \therefore A = 0$$

$$\therefore B = 0$$

$$\therefore f(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]\, g(x)$$

அதாவது $(\alpha - i\beta)$-ம் $f(x)$ – ன் தீர்வாகும்.

மேலே கண்ட தேற்றத்திலிருந்து நாம் கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்கின்றோம்.

(1) ஒற்றைப்படைப் படியுள்ள சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு.

(2) இரட்டைப்படை படியுள்ள சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகளே இல்லாமல் இருக்கலாம். அப்படி ஏதாவது இருப்பின் அவற்றின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையாகத்தான் இருக்கும்.

மடங்குத் தீர்வுகள் (Multiple roots)

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r, \ldots \alpha_n$ என்க. இவற்றில் 'r' தீர்வுகள் சமமாயின், அவைகளை மடங்குத் தீர்வுகள் என்கின்றோம். 'r' தடவைகள் இவ்வாறு தோன்றுமாயின் 'r' மடங்குத்தீர்வுகள் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு உண்டு என்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$(x-3)^4(x-7)^6(x+5)=0$-ன் தீர்வுகள் 3, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 7, 7, –5 ஆகும். இங்கு '3' நான்கு முறை மடங்குத்தீர்வு என்றும், '7' ஆறுமுறை மடங்குத்தீர்வென்றும் கூறுகின்றோம்.

12. $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் காரணி $(x-a)^r$ ஆனால், $f'(x)$-ன் காரணி $(x-a)^{r-1}$ ஆகும். அதாவது $f(x)=0$

என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு தீர்வானது 'r' முறை மடங்குத்தீர் வாகுமாயின், $f^1(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு அத்தீர்வு $(r - 1)$ முறை மடங்குத் தீர்வாக அமையும்.

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், r முறை மடங்குத்தீர்வு 'a' என்க.

$\therefore f(x) = (x - a)^r \varphi(x)$ என எழுதலாம்.

இருபக்கங்களுக்கும் x- ஒட்டிய வகைக்கெழுகாண,

$$f'(x) = r(x - a)^{r-1} \varphi(x - a)^r \varphi^1(x)$$

$$= (x - a)^{r-1} [r \varphi(x) + (x - a)^r \varphi^1(x)]$$

$$= (x - a)^{r-1} [r \varphi(x) + (x - a) \varphi'(x)]$$

$$= (x - a)^{r-1} g(x) \text{ என்க.}$$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் 'a' $(r - 1)$ முறை மடங்குத் தீர்வாக அமையும்.

எனவே 'a' என்பது, $f^2(x) = 0, f^3(x) = 0 \ldots f^{r-1}(x) = 0$ என்பவற்றிற்கு முறையே $(r-2), (r-3), \ldots\ldots\ldots 3, 2, 1$ முறை மடங்குத் தீர்வாக இருக்கும்.

மேலே கண்டதின் மறுதலையை எளிதில் காணலாம். அதாவது $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், 'a' ஆனது $(r-1)$ முறை மடங்குத்தீர்வாக இருக்குமாயின், $f(x) = 0$ என்பதற்கு 'a' ஆனது r முறை மடங்குத்தீர்வாக அமையும்.

13. மடங்குத்தீர்வுகளைக் காணுதல் (To find the multiple roots)

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் உள்ள மடங்குத் தீர்வுகளின் மடங்கையும், தீர்வுகளையும் காண்பது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

$f(x) = 0$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots \alpha_r$ என்றும், அவற்றின் மடங்கு (Multiplicity) $a_1, a_2, \ldots\ldots a_r$ என்றும் கொள்க.

$f(x) = 0$-ன் தீர்வின் மடங்கு r ஆனுல், $f'(x) = 0$-ல் அத் தீர்வின் மடங்கு $(r-1)$ என அறிவோம்.

எனவே, $f(x)$, $f'(x)$ இரண்டும்,

$$(x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2-1}\ldots\ldots(x-\alpha_t)^{a_{r-1}}$$

என்பதால் வகுக்கப்படும் என அறியலாம்.

எனவே $f(x)$, $f'(x)$ -ன் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணி

$$C(x) = (x-\alpha_1)^{a_1^{-1}}(x-\alpha_2)^{a_2^{-1}}\ldots.(x-\alpha_r)^{a_3^{-1}} \quad Q(x)$$

எனலாம். இங்கு $Q(x)$ ஒரு மாறிலி என்பது தெளிவு. ஏனென்ருல், $Q(x)$ -க்கு x ஏதேனும் $(x-m)$ போன்ற ஒரு காரணியிருக்குமாயின், m, α_1, α_2, α_r இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றிற்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். அப்படியிருப்பின், $m = \alpha_1$ என்க. எனவே $f'(x)$ - ன் ஒரு காரணி $(x-\alpha_1)^a$ எனவாகும். இது இயலாது. எனவே $Q(x)$ ஒரு மாறலியாகும். எனவே $f(x)$ க்கும் $f'(x)$ க்கும் மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி

$$(x-\alpha_1)^{a_1-1}(x-\alpha_2)^{a_2-1}\ldots\ldots(x-\alpha_r)^{a_r-1} \quad \text{ஆகும்.}$$

இனி பிறிதொரு முறையில் இதனை நோக்குவோம்.

P_1 என்பது ஒரு மடங்குத்தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகையையும், P_2 என்பது இருமடங்குத் தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகையையும், குறிக்கட்டும். இதேபோல் P_3, P_4,......P_r என்பன மூன்று, நான்கு,......'r' மடங்குத்தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகையைக் குறிக்கட்டும். இங்கு P_k என்பது ஒரு மாறிலியாயின், k மடங்குள்ள தீர்வுகள் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு இல்லை எனக்கொள்வோம்.

எனவே,

$f(x) = p_1 p_2^2 p_3^3\ldots\ldots$ ஆகும்.

$C(x) = p_2 p_3^2 p_4^3\ldots\ldots$ ஆகும்.

$C(x)$, $f(x)$, $f'(x)$ -ன் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணியாகும்.

$C_1(x) = p_3 p_4^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$ என்பது,

$C(x), C'(x)$ -ன் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணியாகும்.

இதேபோல்,

$C_2(x) = p_4 \ldots\ldots$ என்பது

$C_1(x), C_2(x)$ -ன் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணியாகும்.

இவ்வாறு காணப்படும் $C_1(x), C_2(x), \ldots\ldots$ என்ற பொதுக் காரணிகளின் தொடர் $C_{k-1}(x)$ வரை அமைவதாகவும், $C_{k-1}(x)$ ஒரு மாறலி ஆகவும் இருக்குமாயின், k ஐ விட அதிகப்படியான மடங்குத் தீர்வுகள் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு இல்லை என்பது தெளிவு.

மேலே பார்த்தவற்றைக்கொண்டு, தீர்வுகளையும் அவற்றின் மடங்குகளையும் காணக் கீழ்க்கண்டவற்றைப் பார்ப்போம்.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{C(x)} = P_1 P_2 \ldots\ldots P_k.$$

$$f_2(x) = \frac{C(x)}{C_1(x)} = P_2 \ldots\ldots P_k.$$

$$f_k(x) = \frac{C_{k-2}(x)}{C_{k-1}(x)} = P_k \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = P_1,$$

$$\frac{f_2(x)}{f_3(x)} = P_2,$$

$$\frac{f_3(x)}{f_4(x)} = P_3,$$

... ...

... ...

$$\frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)} = P_{k-1}$$

$$f_k(x) = P_k \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வாறு கண்டறிந்த P_1, P_2, P_k சார்புகளிலிருந்து,

$$P_1 = 0$$
$$P_2 = 0$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$P_k = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளைப் பெறுகின்றோம்: இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளின் மடங்கு ஒன்றாகும் (1). எனவே இத் தீர்வுகள் முறையே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒன்று, இரண்டு ....மடங்கு உள்ள தீர்வுகளாகும். இங்கு ஏதேனும் ஒன்று ($P_1, P_2, \ldots P_k$–க்களில்) மாறிலியாயின், அதாவது எடுத்துக்காட்டாக p_r ஒரு மாறிலியாயின், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு, r மடங்கு உள்ள தீர்வு இல்லை என்பதாகும்.

இவற்றைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் நன்கு அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$(3+\sqrt{10})$, 1, -2 இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட அளவுக்கிணங்கிய நாற்படிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இங்கு $(3+\sqrt{10})$, சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வானால், அச் சமன்பாட்டிற்கு $(3-\sqrt{10})$–ம் ஒரு தீர்வாகும். எனவே வேண்டிய சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $3 \pm \sqrt{10}$, 1, -2 ஆகும்.

∴ வேண்டிய சமன்பாடு

$$(x-3-\sqrt{10})(x-3+\sqrt{10})(x-1)(x-2)=0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $[(x-3)^2-10][x^2-3x+2]=0$

அதாவது, $x^4-5x^3-9x^2+11x+2=0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x^4-5x^3-4x^2-8x-8=0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்று $1-\sqrt{5}$ ஆகும். மற்ற தீர்வுகளைக் காண்க.

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = 0$ என்பதின் ஒரு தீர்வு $1 - \sqrt{5}$ ஆயின் $1 + \sqrt{5}$-ம் $f(x) = 0$-ன் ஒரு தீர்வாகும்.

எனவே,

$$(x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5}) = (x - 1)^2 - 5$$
$$= x^2 - 2x - 2$$

$f(x) = 0$ என்பதின் காரணியாகும். எனவே $f(x)$ஐ $(x^2 - 2x - 2)$ ஆல் வகுத்து,

$$f(x) = (x^2 - 2x - 2)(x^2 - 3x + 2)$$
$$= (x^2 - 2x - 2)(x - 2)(x - 1) \text{ எனப் பெறலாம்}$$

$\therefore$ $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகள்

$1, 2, 1 \pm \sqrt{5}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$2x^4 - 13x^3 - 31x^2 - 7x - 13 = 0$-ன் தீர்வுகளில் ஒன்று $(3 + 2i)$ ஆயின், மற்ற தீர்வுகளைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $(3 + 2i)$ ஆகையால், $(3 - 2i)$-ம் ஒரு தீர்வாகும்.

எனவே,

$$(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i)$$
$$= (x - 3)^2 + 4$$
$$= x^2 - 6x + 13$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு காரணியாகும். எனவே, $2x^4 - 13x^3 + 31x^2 - 7x - 13$ஐ $x^2 - 6x + 13$ ஆல் வகுக்க,

$$2x^4 - 13x^3 - 31x^2 - 7x - 13$$
$$= (x^2 - 6x + 13)(2x^2 - x - 1)$$
$$= (x^2 - 6x + 13)(x - 1)(x + 1/2)$$
$$= 0$$

எனப் பெறப்படும்.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $3 \pm 2i$, 1, $-1/2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x^n - a^n = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மடங்குத் தீர்வுகள் இல்லை என நிறுவுக.

$$f(x) = x^n - a^n \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad f'(x) = n\, x^{n-1}$$

$f'(x) = 0$-ல் $x = 0$ என்பது $(n-1)$ மடங்குத் தீர்வாகும். எனவே $x = 0$ என்பது $f(x) = 0$-ன் தீர்வாயின், $x = 0$ ஆனது, $f(x) = 0$-ன் n மடங்குத் தீர்வாகும்.

ஆனால் $a \neq 0$

எனவே $f(x) = 0$-க்கு மடங்குத் தீர்வுகள் கிடையா.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$x^3 - 3\,q\,x + 2\,r = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஓர் இருமடங்குத் தீர்வு இருப்பின் $q^3 = r^2$ என நிறுவுக.

$f(x) = x^3 - 3\,q\,x\, 2\,r = 0$-க்கு ஓர் இரு மடங்குத் தீர்வு இருக்குமாயின்,

$f'(x) = 0$-க்கு அத் தீர்வு ஒரு மடங்குத் தீர்வாயிருக்க வேண்டும்.

$$f'(x) = 3\,x^2 - 3\,q$$

$$3\,x^2 - 3\,q = 0 \text{ என்பதில்}$$

$$x = \pm \sqrt{q} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, $x = +\sqrt{q}$, $x = -\sqrt{q}$ என்பதில் ஏதேனும் ஒன்று $f(x) = 0$-ன் இரு மடங்குத் தீர்வாயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது $x^2 = q$ என்பது $f(x) = 0$-க்குப் பொருந்த வேண்டும்.

எனவே,

$q x - 3 q x + 2 r = 0$

$\therefore \quad -2 q x = -2 r$

$\therefore \quad q x = r$

$q^2 x^2 = r^2$

$\therefore \quad q^3 = r^2$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x^5 - 15 x^3 + 10 x^2 + 60 x - 70 = 0$-க்கு ஒரு மும்மடங்குத் தீர்வு உண்டு. சமன்பாட்டைத் தீர்.

$f(x) = x^5 - 15 x^3 + 10 x^2 + x\, 60 - 70 = 0$ என்க.

$f(x) = 0$-க்கு ஒரு மும்மடங்குத் தீர்வு உண்டெனின், $f''(x) = 0$-ன் ஒரு தீர்வாயிருக்க வேண்டும்.

$f'(x) = 5 x^4 - 45 x^2 + 20 x + 60$

$f''(x) = 20 x^3 - 90 x + 20$

$f''(x) = 0$-ல்

அதாவது $2 x^3 - 9 x + 2 = 0$-ல்

$x = 2$ ஒரு தீர்வாகும்.

$f''(2) = 0, \; f(2) = 0$

எனவே $x = 2$ என்பது மும்மடங்குத் தீர்வாகும்.

எனவே,

$f(x) \equiv (x - 2)^3 (x^2 + 6 x + 9)$

$\equiv (x - 2)^3 (x + 3)^2$

$\therefore \; f(x) = 0$-ன் தீர்வுகள்

$2, 2, 2, -3, -3$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0$-ன் மடங்குத் தீர்வுகளைக் காண்க.

இங்கு § 13-ல் கொடுத்துள்ள முறையைப் பின்பற்றுவோம்.

$f(x) = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடாகட்டும்.

இங்கு $f(x)$-க்கும் $f'(x)$-க்கும் உள்ள மிகப் பெரிய பொதுக் காரணி $C(x)$க் காண்போம்.

$$f(x) \equiv x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2$$

$$f'(x) \equiv 5x^4 - 3x^2 - 8x - 3$$

$$5 \times f(x) \equiv 5x^5 - 5x^3 - 20x^2 - 15x - 10$$

$C(x)$ஐக் கீழ்க்கண்டவாறு காண்கிறோம்:

5	0	−5	−20	−15	−10	5 0 −3 −8 −3	
5	0	−3	−8	−3		1	
		−2	−12	−12	−10		
		1	6	6	5	(−2 ஆல் வகுக்க)	
		...	...	...	...		

5	0	−3	−8	−3	1 6 6 5	
5	30	30	25		5 −30	
	−30	−33	−33	−3		
	−30	−180	−180	−150		
		147	147	147		
		1	1	1	(147ஆல் வகுக்க)	
	...	...	...	...		

1	6	6	5		1	1	1
					1	5	
1	1	1					
	5	5	5				
	5	5	5				
			0				

எனவே,

$C(x) = x^2 + x + 1$ ஆகும்.

இனி $C_1(x)$ஐக் காண்போம்.

	1	1	1		2	1
					1	1
(2 ஆல் பெருக்க) ←	2	2	2			
	2	1				
		1	2			
		2	4	(2ஆல் பெருக்க)		
		2	1			
			3			

எனவே $C_1(x)$ ஒரு மாறிலியாகும். இதிலிருந்து இரு மடங்கைவிட அதிகமான மடங்குடைய தீர்வுகள் இல்லையென அறிகின்றோம்.

இனி,

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{C(x)} = x^3 - x^2 - x - 2$$

$$f_2(x) = \frac{C(x)}{C_1(x)} = x^2 + x + 1$$

$$\therefore \quad P_1 = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = (x - 2)$$

$$P_2 = f_2 = x^2 + x + 1$$

இங்கு P_1 ஒரு மடங்குடைய தீர்வையும், P_2 இரு மடங்குள்ள தீர்வையும் கொடுக்கின்றது.

P_1-லிருந்து, $x = 2$ எனவும்,

P_2-லிருந்து $x = \omega, \omega^2$

$$\left[\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right]$$

என அறிகின்றோம். எனவே,

$f(x) = (x - 2)(x - \omega)^2 (x - \omega^2)^2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$a x^3 + 36 x^2 + 3 cx + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மும்மடங்குத் தீர்வு இருக்குமாயின், அதற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்க.

அதாவது $a x^3 + 3b x^2 + 3 cx + d = 0$-ன் தீர்வு α, α, α என இருக்கும். எனவே,

$$a x^3 + 3 b x^2 + 3 cx + d \equiv a (x - \alpha)^3$$

$$\equiv a [x^3 - 3 \alpha x^2 + 3 \alpha^2 x - \alpha^3]$$

சமபடிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$3 b = - 3 a \alpha$

$3 c = 3 a \alpha^2$

$d = - a \alpha^3$ ஆகும்.

$$\therefore \quad b = -a\alpha$$
$$c = a\alpha^2$$
$$\therefore \quad b^2 = a^2\alpha^2 = a.c. \qquad \ldots \quad (1)$$
$$bc = (-a\alpha)(a\alpha^2) = -a^2\alpha^3$$
$$= +a(-a\alpha^3)$$
$$= ad \qquad \ldots \quad (2)$$

எனவே வேண்டிய நிபந்தனைகள்

$b^2 = ac,\ bc = ad$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மும்மடங்குத் தீர்வு உண்டாயின்,

$3a^2 = 4b$

$27a^4 + 16c = 0$ என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு மும்மடங்குத் தீர்வு α எனவும், மற்றொரு தீர்வு β எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad x^4 a x^3 + 6bx^2 + c$$
$$\equiv (x-\alpha)^3 (x-\beta)$$
$$\equiv (x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3)(x-\beta)$$
$$\equiv x^4 - (3\alpha + \beta)x^3 + (3\alpha^2 + 3\alpha\beta)x^2$$
$$-(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta)x + \alpha^3\beta$$

சமபடிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$$4a = -3\alpha - \beta \qquad \ldots \quad (1)$$
$$6b = 3\alpha^2 + 3\alpha\beta \qquad \ldots \quad (2)$$
$$0 = -\alpha^3 - 3\alpha^2\beta \qquad \ldots \quad (3)$$
$$c = \alpha^3\beta \qquad \ldots \quad (4)$$

(3)–லிருந்து,

$$\alpha^2 (\alpha + 3\beta) = 0, \quad \alpha \neq 0$$

$\therefore \quad \alpha + 3\beta = 0 \qquad \dots \qquad (5)$

(1), (2), (5)–லிருந்து α, β–க்களை நீக்கி,

$4a = -3(-3\beta) - \beta = 8\beta$

$6b = 3(9\beta^2) + 3(-3\beta)\beta$

$\quad = 27\beta^2 - 9\beta^2 = 18\beta^2$

$\therefore \quad b = 3\beta^2, \ a = 2\beta$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது,

$$3a^2 = 3.4\beta^2$$

$$= 12\beta^2$$

$$= 4b$$

$$\therefore \quad \underline{3a^2 = 4b}$$

α, β–வை (1), (4), (5)–லிருந்து நீக்க,

$$a = 2\beta$$

$c = (-3\beta)^3, \beta = -27\beta^4$

$27a^4 = 27(2\beta)^4 = -16c$

$\therefore \quad 27a^4 + 16c = 0$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$x^n - nqx + (n-1)r = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஓர் இருமடங்குத் தீர்வு உண்டெனின்,

$$q^n = r^{n-1} \text{ என நிறுவுக.}$$

$f(x) \equiv x^n \equiv nqx + (n-1)r$ என்க.

$$\therefore \quad f'(x) \equiv n\,x^{n-1} - n\,q$$

$f'(x) =$ என்பதிலிருந்து

$$x^{n-1} = q$$

அல்லது $x = q^{1/n-1}$ எனப் பெறலாம். f x-க்கு இரு மடங்குத் தீர்வு உண்டு என்பதால் $x = q^{1/n-1}$ க்கு $f(x) = 0$ என்பது பொருந்த வேண்டும். அல்லது $x^{n-1} = q$ என்பதற்குப் பொருந்த வேண்டும்.

$$\therefore \quad x\,q - nqx + (n-1)\,r = 0$$

$$-xq\,(n-1) + (n-1)\,r = 0$$

$$\therefore \quad (n-1)\,(r - xq) = 0$$

$$n - 1 \neq 0$$

$$\therefore \quad r = xq$$

$$\therefore \quad x = \frac{r}{q}$$

ஆனால் $x = q^{1/n-1}$

$$\therefore \quad q^{1/n-1} = \frac{r}{q}$$

$$\therefore \quad q = \frac{r^{\,n-1}}{q^{\,n-1}}$$

$$q^n = r^{\,n-1}$$

பயிற்சி

(1) கீழ்க்கண்டவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட அளவுக்கிணங்கிய சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $\sqrt{5} - \sqrt{2}, \quad -\sqrt{5} + \sqrt{2}, \quad -\sqrt{5} - \sqrt{2}$

(ii) $4\sqrt{3},\ 3 + 2i$

(iii) $1 + 5i,\ 5 - i$

(iv) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

(v) $1,\ 3 - 2i$

(2) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் அளவுக்கிணங்கியவை. அவற்றின் தீர்வுகளைக் காண்க.

(i) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

(ii) $x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 18x - 72 = 0$

(iii) $x^3 - 5x^2 - 18x + + 72 = 0$

(iv) $x^4 - - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60 = 0$

(3) தீர்க்க:

(1) $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $2+3i$

(2) $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $1+i$

(3) $x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு i

(4) $x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு i

(5) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$-ன் ஒரு தீர்ப்பு $(-2+\sqrt{3})$

(6) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 2 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $(2+\sqrt{3})$

(7) $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $(2+i\sqrt{3})$

(8) $x^4 + 2x^2 - 16x + 77 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $(-2+i\sqrt{7})$

(9) $2x^6 - 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 27x + 81 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு i $(\sqrt{2} + i)$

(10) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $(1+i)$

(4) $a, b, c, \ldots\ldots l;\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda, m;$ யாவும் ஒன்றுக்கொன்று சமனில்லாத மெய்யெண்களாயின்,

$$\frac{a^2}{(x-\alpha)} + \frac{b^2}{(x-\beta)} + \ldots\ldots + \frac{l^2}{(x-\lambda)} = x - m$$

என்ற சமன்பாடு கற்பனைத் தீர்வுகள் பெற்றிருக்க முடியாது என நிறுவுக.

(5) $$\frac{a_1^2}{x-\alpha_1} + \frac{a_2^2}{x-\alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{a_n^2}{x-\alpha_n} = 1\text{-ன்}$$

தீர்வுகள் மெய்யெண்கள் என நிறுவுக. $a_1, a_2, \ldots a_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ மெய்யெண்கள்.

(6) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c$ மெய்யெண்களானால்;

$\frac{a^2}{x-\alpha} + \frac{b^2}{x-\beta} + \frac{c^2}{x-\gamma} = x - \delta$ என்பது மெய்யெண் தீர்வுகளே பெற்றிருக்குமென நிறுவுக.

(7) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மூன்று தீர்வுகள் சமமானல் அவை ஒவ்வொன்றும்

$\frac{6c - ab}{3a^2 - 8b}$ என நிறுவுக.

(8) $x^3 - 3px^2 + 3qx - r = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு தீர்வுகள் சமமானல், மூன்ருவது தீர்வு

$\frac{3p^3 - 4pq + r}{p^2 - q}$ என நிறுவுக.

(9) $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு தீர்வுகள் சமமானல்,

$4(b^2 - ac)(a^2 - b) = (c - ab)^2$ என்றும், மூன்ரும் தீர்வு

$\frac{c(b - a^2)}{b^2 - ac}$ எனவும் நிறுவுக.

(10) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் மடங்குத்தீர்வுகள் பெற்றிருப்பின் அவற்றைத் தீர்க்கவும்.

(1) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$

(2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

(3) $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$

(4) $x^4 - \frac{x}{2} + \frac{3}{16} = 0$

(5) $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 36x - 27 = 0$

(6) $2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0$

(7) $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 = 0$

(8) $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32 = 0$

(9) $9x^5 + 96x^4 + 292^3 + 48x^2 - 576x + 256 = 0$

(10) $x^8 + x^7 - 8x^6 - 6x^5 + 21x^4 + 9x^3 - 22x^2 - 4x + 8 = 0$

விடை

446862

(1) $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$

(2) $x^4 - 10x^3 - 19x^2 + 480x - 1932 = 0$

(3) $x^4 - 12x^3 + 72x^2 - 312x + 676 = 0$

(4) $x^4 + 1 = 0$

(5) $x^3 - 7x^2 + 17x - 11 = 0$

(2) (1) $\pm 1, 3, -2$

(2) $-1, 3, 4, 6$

(3) $3, 6, -4$

(4) $2, 2, 3, -5$

(3) (1) $-1, -1, 2 + 3i, 2 - 3i$.

(2) $-1, 1 + i, 1 - i, 1 - i, 1 + i$.

(3) $1, 2, i, i, -i, -i$.

(4) $1, i, i, -i, -i, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

(5) $-2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm i$

(6) $2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm i$

(7) $2 \pm i\sqrt{3}, -2 \pm i$

(8) $-2 \pm i\sqrt{7}, 2 \pm i\sqrt{3}$

(9) $\sqrt{2} \pm i, \frac{3}{4}(1 \pm i\sqrt{7})$

(10) $-2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm i$

(10) (1) $3, 2, 2$

(2) $-3, 2, 2$

(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $\frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

(5) $-3, 1, 3, 3$

(6) $\pm i/2, 3, 3$

(7) $3, 2, -1, -1, -1$

(8) $2, 2, -2, -2, -2$

(9) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -4, -4, -4$

(10) $2, -2, -1, -2, -1, 1, 1, 1$

3. சமன்பாட்டின் கெழுக்களுக்கும் தீர்வுகளுக்கும் உள்ள தொடர்புகள்

(Relation between the Coefficients and roots of equations)

(1) $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots \dots + a_n$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். $f(x)$-ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ என்க. அப்பொழுது

$$s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n$$

$$s_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots$$

$$s_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$s_n = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$$

என்பதைக் குறிக்கும்.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ என்பன $f(x)$-ன் தீர்வுகளாதலால்,

$$f(x) \equiv a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - d_n)$$

$$= a_0 \{x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^r s_r + \dots + (-1)^n s_n\}$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

இரண்டிலும் சமப்படிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிடுவோமாயின்,

$$a_1 = -a_o s_1$$

$$a_2 = -a_o s_2$$

$$a_3 = -a_o s_3$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$a_r = a_o (-1)^r s_r$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$a_n = a_0 (-1)^n s_n$$

எனப் பெறப்படும்.

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை a_o ஆல் வகுத்து,

$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$ என எழுதுவோமானல்,

$$s_1 = -p_1$$

$$s_2 = p_2$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$s_r = (-1)^r p_r$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$s_n = p_n$ எனப் பெறப்படும்.

இவைகளே ஒரு சமன்பாட்டின் கெழுக்களுக்கும், அதன் தீர்வுகளுக்குமுள்ள தொடர்புகளாகும்.

[குறிப்பு : மேலே கண்டவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றை நாம் அறிகின்றோம்.

(1) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்கும், கெழுக்களுக்குமுள்ள தொடர்பினை எழுதும் முன்பு, அதிகப்படியுள்ள உறுப்பின் கெழு ஒன்றாக இருக்கும்படி மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும்.

(2) $s_n = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = p_n$ என்பதிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு தீர்வும், அச் சமன்பாட்டின் தனி உறுப்பால் (Absolute term or the last term or the constant term of an equation) வகுக்கப்படும் அல்லது தனி உறுப்பின் காரணியாகும்.

(3) சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெல்லாம் நேர் எண்ணாயின் அச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களின் குறி, நேர், எதிர் என மாறி மாறியிருக்கும். தீர்வுகளெல்லாம் எதிர் எண்ணாயின், எல்லா கெழுக்களும் நேர் மெய்யெண்களாக இருக்கும்.

(4) சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்கும், கெழுக்களுக்குமிடையே உள்ள தொடர்பைக் கொண்டு மட்டும் தீர்வுகளைக் காண முடியாது. தீர்வுகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளையும் கொண்டுதான் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க இயலும். இதனைக் கீழ்கண்ட எடுத்துகாட்டுகள் விளக்கும்.]

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருப்பின், சமன்பாட்டைத் தீர்.

$x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$-ன் தீர்வுகள் $\alpha - \delta$, α, $\alpha + \delta$ என்க.

$$\therefore \quad \alpha - \delta + \alpha + \alpha + \delta = s_1 = 15$$

$$\therefore \quad 3\alpha = 15$$

$$\therefore \quad \alpha = 5$$

$$(\alpha - \delta)\,\alpha\,(\alpha + \delta) = s_3 = 105$$

$$(\text{அதாவது})\ \alpha(\alpha^2 - \delta^2) = 105$$

$$\therefore \quad \alpha^3 - \delta^2 = 21$$

$$\therefore \quad \delta^2 = 4$$

$$\therefore \quad \delta = 2$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$5 - 2,\ 5,\ 5 + 2$

அதாவது,

3, 5, 7 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருப்பின், தீர்வுகளைக் காண்க.

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$\frac{\alpha}{\delta}, \alpha, \alpha\delta$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{\delta} + \alpha + \alpha\delta = 7 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{\alpha}{8}\,\alpha \,.\, \alpha\delta = 8 \qquad \ldots \quad (2)$$

(2)-லிருந்து, $\alpha^3 = 8$

$\therefore \quad \alpha = 2$

(1)-லிருந்து, $\delta = 2$

$\therefore$ தீர்வுகள் 1, 2, 4 ஆகும்.

டுத்துக்காட்டு 3 :

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு வுகள் $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ வடிவில் இருக்குமாயின், தீர்வுகளைக் காண்க.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \gamma$ என்க.

$$\therefore \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \gamma = 2 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha\beta + \alpha\gamma + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \beta\gamma = -3$$

$$\therefore \quad 1 + \alpha(\beta + \gamma) + \frac{1}{\alpha}(\beta + \gamma) + \beta\gamma = -3 \quad \ldots \quad (2)$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \beta\gamma = -1$$

$$\therefore \quad \beta\gamma = -1 \qquad \ldots \quad (3)$$

(2), (3)-லிருந்து,

$$1 + (\alpha + \frac{1}{\alpha})(\beta + \gamma) - 1 = -3$$

$$\therefore \quad (\alpha + \frac{1}{\alpha})(\beta + \gamma) = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \frac{1}{\alpha} = p \\ \beta + \gamma = q \end{array}\right\} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad pq = -3$$

$$p + q = 2 \quad [\,(1)\text{-லிருந்து}]$$

$$(p - q)^2 = (p + q^2) - 4pq$$

$$= 4 + 12 = 16$$

$$\therefore \quad p - q = 4$$

$$\therefore \quad 2p = 6, \quad p = 3, \; q = -1$$

$q = -1$ என்பதிலிருந்து,

$$\beta + \gamma = -1$$

$$\beta\gamma = -1 \text{ [(2)-லிருந்து]}$$

$$\therefore\ (\beta - \gamma)^2 = 5,\quad (\beta - \gamma) = \sqrt{5}$$

$$\therefore\ 2\beta = \sqrt{5} - 1,\ \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\therefore\ \gamma = -\frac{(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

$p = 3$ என்பதிலிருந்து,

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

$$\alpha^2 + 1 = 3\alpha$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

∴ தீர்வுகள்

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2},\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2},\ \frac{\sqrt{5} - 1}{2},\ -\frac{(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் இசைத் தொடரில் இருக்குமாயின், தீர்வுகளைக் காண்க.

$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$\frac{1}{\alpha - \delta},\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha + \delta} \text{ என்க.}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha - \delta} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha + \delta} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha^3 - \alpha\,\delta^2} = \frac{1}{6} \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha - \delta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + \delta} = \frac{11}{6}$$

$$\therefore \quad \frac{3\,\alpha^2 - \delta^2}{\alpha\,(\alpha^2 - \delta^2)} = \frac{11}{6} \qquad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{1}{\alpha\,(\alpha - \delta)} + \frac{1}{\alpha\,(\alpha + \delta)} + \frac{1}{\alpha^2 - \delta^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{3}{(\alpha^2 - \delta^2)} = 1$$

$$\therefore \quad \alpha^2 - \delta^2 = 3 \qquad \ldots \quad (3)$$

(1)–லிருந்து,

$$\frac{1}{3\,\alpha} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad \alpha = 2, \quad \delta = \pm\, 1.$$

$\delta = 1$ அல்லது $\delta = -1$ எனக் கொண்டால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

1, 1/2, 1/3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$x^3 - 12\,x^2 + 20\,x + 96 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் இரண்டு 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. சமன்பாட்டைத் தீர்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் நிபந்தனைக்குத் தகுந்தவாறு, சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $3\,\alpha$, $4\,\alpha$, β என்க.

$$\therefore \quad 3\,\alpha + 4\,\alpha + \beta = 12$$

$$\therefore \quad \beta + 7\,\alpha = 12 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$3\,\alpha \,.\, 4\alpha + 3\,\alpha \,.\, \beta + 4\,\alpha \,.\, \beta = 20$$

$$\therefore \quad 12\alpha^2 + 7\alpha\beta = 20 \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$3\alpha \cdot 4\alpha \cdot \beta = 12\alpha^2\beta$$

$$= -96$$

$$\therefore \quad \alpha^2\beta = -8 \qquad \ldots \qquad (3)$$

(1)-லிருந்து,

$$\beta = 12 - 7\alpha$$

$\therefore$ (2)-லிருந்து,

$$-37\alpha^2 + 84\alpha - 20 = 0$$

$\therefore \quad \alpha = 2$ அல்லது $\frac{10}{37}$

$\frac{10}{37}$ சமன்பாட்டின் தீர்வாகாதாகையால்,

$\alpha = 2$ எனக் கொள்வோம். $\beta = -2$.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் 6, 8, — 2 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஓர் இசைத் தொடரில் அமையுமானுல்,

$2b^3 = c(3bc - c)$ என நிறுவுக.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β, γ என்க.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி

$$\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

$$\therefore \quad 2\alpha\gamma = \beta\gamma + \beta\alpha$$

$$\therefore \quad 3\alpha\gamma = \beta\gamma + \beta\alpha + \alpha\gamma \qquad \ldots \qquad \text{I}$$

ஆனுல்,

$$\alpha + \beta + \gamma = -3a \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3b \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -c \qquad (3)$$

I-லிருந்து,

$$3\alpha\gamma = 3b$$

$$\alpha\gamma = b$$

(3)-லிருந்து,

$$\beta = -\frac{c}{b} \qquad (4)$$

(2)-லிருந்து,

$$\alpha\beta + \beta\gamma = 3b - \alpha\gamma$$

$$\therefore \beta(\alpha + \gamma) = 3b - b = 2b$$

$$\therefore \alpha + \gamma = -\frac{2b^2}{c} \quad \left[\because \beta = -\frac{c}{b}\right] \quad \dots \quad (5)$$

(1), (5)-லிருந்து,

$$\beta = -3a + \frac{2b^2}{c} \quad \dots \quad (6)$$

(4), (6)-லிருந்து,

$$-\frac{c}{b} = -3a + \frac{2b^2}{c}$$

$$\therefore -c^2 = -3abc + b^3$$

$$\therefore 2b^3 = c(3ab - c)$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$18x^3 + 81x^2 + 121x + 60 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு மற்ற இரண்டு தீர்வுகளின் சராசரிக்குச் சமமாயின், அத் தீர்வுகளைக் காண்க.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β, γ ஆயின்,

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma = \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\beta\gamma = -\frac{60}{18} = -\frac{10}{3} \quad \dots \quad (1)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\beta + \gamma}{2} + \beta + \gamma$$

$$= \frac{3}{2}(\beta + \gamma)$$

$$= -\frac{81}{18} = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore \quad (\beta + \gamma) = -3 \qquad \ldots \qquad (2)$$

(2)ஐ, (1)-ல் பிரதியிட

$$-\frac{3}{2}\beta\gamma = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore \beta\gamma = \frac{20}{9}$$

$$(\beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma$$

$$= 9 - \frac{80}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \quad \beta - \gamma = 1/3$$

$$\beta + \gamma = -3$$

$$\therefore \quad \beta = -4/3,$$

$$\gamma = -5/3,$$

$$\alpha = -3/2$$

ஆகவே $-3/2$, $-4/3$, $-5/3$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$x^4 + p\,x^3 + q\,x^2 + r\,x + = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இத் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை மற்ற இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாயின்,

$p^3 + 8r = 4pq$ என நிறுவுக.

கொடுத்துள்ள நிபந்தனையின்படி, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ சமன்பாட்டின் தீர்வாயின்,

$\alpha+\beta = \gamma+\delta$ ஆகும்.

இங்கு

$\alpha+\beta+\gamma+\delta = -p$

$\alpha+\beta = \gamma+\delta$ ஆதலால்,

$2(\alpha+\beta) = -p$

$\alpha+\beta = \gamma+d = -\frac{p}{2}$ ... ... (1)

$\sum \alpha\beta = q$

(அதாவது)

$\alpha\beta + (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) + \gamma\delta = q$

$\therefore \quad \alpha\beta + \frac{p^2}{4} + \gamma\delta = q$ [(1) லிருந்து]

$\therefore \quad \alpha\beta + \gamma\delta = q - \frac{p^2}{4}$ ... ... (2)

$\sum \alpha\beta\gamma = -r$

(அதாவது)

$\alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = -r$

$(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha+\beta) = -r$

$\therefore \quad (\alpha\beta+\gamma\delta)(-p/_2) = -r$

$\therefore \quad \alpha\beta + \gamma\delta = \frac{2r}{p}$ ... ... (3)

(2), (3)–லிருந்து,

$$q - \frac{p^2}{4} = \frac{2r}{p}$$

$$\therefore \quad p^3 + 8r = 4pq$$

பயிற்சி

(1) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க:

I. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன.

(1) $2x^3 - 3x^2 + 11x + 6 = 0$

(2) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

(3) $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$

(4) $9x^3 - 27x^2 + 23x - 5 = 0$

II. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் இசைத் தொடரில் உள்ளன.

(1) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$

(2) $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$

(3) $81x^3 - 18x^2 - 36x + 8 = 0$

III. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன.

(1) $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$

(2) $x^3 - 19x^2 + 114x - 216 = 0$

(3) $27x^4 - 195x^3 + 494x^2 - 520x + 192 = 0$

(2) $3x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் இரண்டின் பெருக்குத் தொகையைப் போல் மூன்று மடங்காயின், தீர்வுகளைக் காண்க.

(3) $36x^3 - 45x^2 - 22x + 24 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்று மற்றொன்றைப் போல இரு மடங்காயின் தீர்வுகள் காண்க.

(4) $4x^4 - 16x^3 + ax^2 + bx - 7 = 0$-ன் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானால், தீர்வுகள் காண்க.

(5) $2x^4 - 15x^3 - 25x^2 + 124x + 96 = 0$-ன் இரு தீர்வுகளுக் குள்ள வேறுபாடு 5 எனின் தீர்வுகள் காண்க.

(6) $6x^4 - 11x^3 + 11x^2 - 5x + 2 = 0$-ன் இரு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை ஒன்றெனின் (1), தீர்வுகள் காண்க.

(7) $3x^4 - 25x^3 + 50x^2 - 50x + 12 = 0$-ன் இரு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை 2 எனின், தீர்வுகள் காண்க.

(8) $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$-ன் இரு தீர்வுகள் 3:2 என்ற விகிதத்தில் இருப்பின் தீர்வுகள் காண்க.

(9) $x^3 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $343r^2 + 36q^3 = 0$ என்ற தொடர்புண்டு. அச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்று மற்றொன்றைப் போல் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

$x^3 - 7x + 6 = 0$-க்கு மேற் கூறிய நிபந்தனை பொருந்து மென நிறுவி, அதன் தீர்வுகளைக் காண்க.

(10) $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$-ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருப்பதற்கான நிபந்தனை $p^3 r = q^3$ என நிறுவுக.

(11) $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$-ன் இரு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை மற்ற இரு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமானால், $sp^2 = r^2$ என நிறுவுக.

(12) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$-ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருப்பின், $c^3a = b^3d$ என நிறுவுக.

(13) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஒரு கூட்டுத் தொடரில் இருப்பின், $2p^3 + 27r = 9pq$ என நிறுவுக.

(14) $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$-ன் தீர்வுகள் அளவில் சமமாயும், குறியில் மாறுபட்டுமிருப்பின் $r^2+p^2s=pqr$ என நிறுவுக.

(15) $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$-ன் தீர்வுகள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. இதில் $\alpha\beta+\gamma\delta=0$ ஆனால், $p^2s+r^2=4qs$ என நிறுவுக. இதன் மறுதலையையும் நிறுவுக.

(16) $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$-ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருப்பதற்கான நிபந்தனை $3a_1^4+16a_0\,a_1^2a_2-64a_0^2a_1a_3+256\,a_0^3a_4=0$ என நிறுவுக.

(17) $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரு இணையான சமமான தீர்வுகள் இருப்பதற்கான நிபந்தனை

$3abc=a^2d+2b^3$, $eb^2=ad^2$ என நிறுவுக.

(18) $x^3-3px^2+3qx-r=0$-ன் தீர்வுகளில் இரண்டு சமமாயின், மற்றொன்று

$$\frac{3p^3-4pq+r}{p^2-q}$$ என நிறுவுக.

(19) $x^4+4ax^3+6bx^2+c=0$-ன் மூன்று தீர்வுகள் சமமாயின், $3a^2=4b$, $27a^4+16c=0$ என நிறுவுக.

(20) $x^4+ax^3+6bx^2+cx+d=0$-ன் மூன்று தீர்வுகள் சமமாயின் அவை ஒவ்வொன்றும்

$$\frac{6c-ab}{3a^2-8b}$$ -க்குச் சமம் என நிறுவுக.

(21) $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனில்,

$a^2(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)=(a-3c)^2+(3b-d)^2$ என நிறுவுக.

(22) O, A, B, C என்ற நான்கு புள்ளிகள் ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளன. O-விலிருந்து, A, B, C-ன் தூரங்கள் $ax^3+bx^2+cx+d=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள். B, AC-ன் மையப் புள்ளியாயின்,

$$a^2d-3abc+2b^3=0$$

என நிறுவுக.

விடை

I (1) $-2, \frac{1}{2}, 3.$ (2) $2, 3, 4.$

(3) $-5, -2, 1, 4.$ (4) $\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}.$

II (1) $1, \frac{1}{2}, 3.$ (2) $-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}.$

III (1) $-2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}.$ (2) $4, 6, 9.$ (3) $\frac{8}{9}, \frac{4}{3}, 2, 3.$

(2) $3, 1, 2, \frac{1}{2};$

(3) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{3}{4}$

(4) $a = 4$ அல்லது $-\frac{1}{9}$, $b = 24$ அல்லது $\frac{296}{9}$.

(5) $\pm\sqrt{3},\ 1 \pm i\sqrt{6}$

(6) $8, 3, \dfrac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$

(7) $\dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

(8) $6, \frac{1}{3}, 1 \pm i$

(9) $6, 4, -1$

(10) $1, 2, -3.$

4. சமன்பாடுகளின் மாற்றமைப்புகள்

(Transformation of Equations)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மையை எளிதாக அறிய முடியவில்லையானால், அச் சமன்பாட்டை மாற்றியமைப்பதினால் சில சமயங்களில் தீர்வுகளின் தன்மையை அறிய முடிகின்றது. இங்குச் சமன்பாடுகளின் மாற்றமைப்பு முறைகளில் சிலவற்றைக் காண்போம்.

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ எனின், $\varphi(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2) \ldots\ldots \varphi(\alpha_n)$ என்பனவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்பதே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மாற்றமைப்பு எனப்படும்.

(1) குறிமாற்றிய தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காணல் (To find the transformation of an equation into another having roots equal in magnitude but opposite in sign.)

$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ என்க. இங்கு நாம், $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, $\ldots\ldots \alpha_n$ இவற்றினைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண வேண்டும்.

$$f(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots\ldots(x - \alpha_n)$$

$$\equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$$

இங்கு $x = -y$ எனப்பிரதியிட

$$f(-y) \equiv (-1)^n (y + \alpha_1)(y + \alpha_2)\ldots\ldots(y + \alpha_n)$$

$$\equiv (-1)^n \{ y^n - a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} \ldots\ldots + a_n \}$$

இங்கு n ஒற்றைப்படை எண்ணாகவோ அல்லது இரட்டைப்படை எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

எனவே,

$(-1)^n (y + \alpha_1)(y + \alpha_2)\ldots(y + \alpha_n) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n$ ஆகும்.

$\therefore f(-y) = 0$ என்பது நமக்கு வேண்டும் சமன்பாடாகும். இதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனின், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a^n = 0$ ஆயின், குறிமாற்றிய தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாடு

$$x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n a_n = 0$$

ஆகும் என்பதாகும், எனவே குறிமாற்றிய தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாடு அமைக்க, சமன்பாட்டின் உறுப்புகளுக்கு ஒன்றுவிட்டு ஒன்று குறிமாற்றி அமைத்தால் போதுமானது. இடையில் ஏதேனும் விட்டுப்போன படிகளுக்குரிய உறுப்புகளுக்கு '0' கெழு இருப்பதாகக்கொண்டு குறிமாற்றம் செய்யவேண்டும்.

(2) சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப்போல் K மடங்கு உள்ள தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாடு காணல் (To transform an equation to another whose roots are k times the roots of the given equation.)

$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha n$ என்க. இங்கு $k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots k\alpha_n$ இவற்றினைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காணவேண்டும்.

$$f(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots\ldots\ldots(x - \alpha_n)$$

இங்கு $x = y/k$ எனப்பிரதியிட,

$$f(y/k) \equiv \left(\frac{y}{k} - \alpha_1\right)\left(\frac{y}{k} - \alpha_2\right)\ldots\left(\frac{y}{k} - \alpha_n\right)$$

எனப் பெறப்படும்.

அதாவது,

$$f\left(\frac{y}{k}\right) \equiv \left(\frac{y}{k}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$$

$$\equiv\left(\frac{y}{k}-\alpha_1\right)\left(\frac{y}{k}-\alpha_2\right)\ldots\left(\frac{y}{k}-\alpha_n\right)$$

இரு பக்கங்களையும் k^n ஆல் பெருக்கினல்,

$$y^n + a_1 k y^{n-1} + \ldots \ldots + a_{n-1} k^{n-1} x + a_n k^n$$

$$\equiv (y - k\alpha_1)(y - k\alpha_2)\ldots(y - k\alpha_n)$$

எனப் பெறப்படும்.

அதாவது,

$y^n + a_1 k y^{n-1} + a_2 k^2 y^{n-2} + \ldots + a_n k^n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $k\alpha_1, k\alpha_2 \ldots k\alpha_n$ என அறிகின்ரேம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் போல் k மடங்கு உள்ள தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காண கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் உறுப்புகளை வரிசையாக (Successively) முறையே $1, k, k^2, \ldots k^n$ ஆல் பெருக்கினல் போதுமானது.

(3) $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ஆயின் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n}$ இவற்றினைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காணல் (To find the equation whose roots are reciprocal to the roots of the given equation)

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots + a_n$$

$$\equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\ldots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)$$

எனப் பெறப்படும்.

அதாவது,

$$y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \equiv 1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots\ldots + a_n y^n$$

$$\equiv (1-y\alpha_1)\ (1-y\alpha_2) \ldots\ldots (1-y\alpha_n)$$

எனப் பெறப்படும்.

எனவே, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n}$ என்பவற்றைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாடு.

$a_n y^n + a_{n-1} + y^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 y + 1 = 0$ ஆகும்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து, இங்கு நமக்கு வேண்டிய சமன்பாட்டைப் பெற, சமன்பாட்டின் கெழுக்களைத் தலைகீழ் வரிசையில் எழுதிப் பெறலாம் என அறிகின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5 + 7x^4 + 7x^3 - 8x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் குறிமாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

தேற்றம் 4–1 – ன் படி, சமன்பாட்டின் உறுப்புகளுக்கு ஒன்று விட்டு ஒன்று குறிமாற்றி அமைத்தலின் மூலம் வேண்டிய சமன்பாட்டினைப் பெறலாம். எனவே, இங்கு நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு,

$x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 8x^2 + x - 1 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^7 + 3x^5 + x^3 - x^2 + 7x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் குறிமாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை

$x^7 + 0 \cdot x^6 + 3x^5 + 0 \cdot x^4 + x^3 - x^2 + 7x + 2 = 0$ என எழுதலாம். இப்பொழுது தேற்றம் 5–1 – னினைப் பயன்படுத்தினல், வேண்டிய சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எனவே, நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு

$x^7 + 3x^5 + x^3 + x^2 + 7x - 2 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, x^4-ன் கெழு ஒன்ருகக்கொண்ட மாற்றிய சமன்பாட்டைக் காண்க.

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் 3 மடங்கு உள்ள தீர்வுகளின் சமன்பாட்டினைக் காண்போம். தேற்றம் 5–2-ன் படி, நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடு,

$$3x^4 - 3\cdot 4x^3 + 3^2\cdot 4x^2 - 3^3\cdot 2x + 3^4 = 0 \text{ ஆகும்,}$$

அதாவது,

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 18x + 27 = 0$ என்பது நமக்குத் தேவையான சமன்பாடாகும்.

[குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் x^4-ன் கெழு 3 ஆகையால், வேண்டிய சமன்பாட்டினைப் பெற, தீர்வுகளின் 3 மடங்கு உள்ள தீர்வுகளின் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டோம்.]

எடுத்துக்காட்டு 4:

$x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{13}{900} = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள பின்ன கெழுக்களை நீக்கி மாற்றிய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் m மடங்கு உள்ள தீர்வுகளாலான சமன்பாடு

$$x^4 - \frac{5}{6}\cdot mx^3 + \frac{5}{12}m^2x^2 - m^4\cdot\frac{13}{900} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது,

$$x^4 - \frac{25}{30}m\cdot x^3 + \frac{375}{30^2}m^2x^2 - m^4\cdot\frac{13}{30^2} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $m = 30$ எனக் கொள்வோமாயின், மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு நமக்குத் தேவையான சமன்பாடாகும்.

$$\therefore x^4 - 25x^3 + 375x^2 - 11700 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி

(1) $x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 13x^3 + 7x^2 + 5x - 3 = 0$-ன் தீர்வுகளின் குறிமாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

(2) $81x^3 - 18x^2 - 36x + 8 = 0$-ன் தீர்வுகள் இசைத் தொடரில் உள்ளன. தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரிலும் x^3-ன் கெழு ஒன்றுகவும் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

[குறிப்பு: $1/a$, $1/b$, $1/c$ என்பன இசைத் தொடரில் இருக்குமானல், a, b, c கூட்டுத்தொடரில் அமையும் என்பதைப் பயன்படுத்தவும்.]

(3) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளில் உள்ள பின்ன கெழுக்களை மாற்றிய சமன்பாட்டைக் காண்க:

(i) $x^3 - 1/2\,x^2 + \dfrac{2}{3}x - 1 = 0$

(ii) $x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{7}{18}x + \dfrac{1}{108} = 0$

(iii) $x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{16}x + \dfrac{1}{72} = 0$

(4) $3x^4 - \dfrac{5}{2}x^3 + \dfrac{7}{6}x^2 - x + \dfrac{7}{18} = 0$-ல் x^4-ன் கெழு ஒன்றுக இருக்கும்படியான மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(5) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு $x^4 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ எனின், $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\gamma}, \dfrac{1}{\delta}$ ஐத்தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடை

(1) $x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 5x - 3 = 0$.

(2) $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$

(3) (i) $x^3 - 3x^2 + 24x - 216 = 0$

(ii) $x^3 - 15x^2 - 14x + 2 = 0$

(iii) $x^3 + 3x^2 - 9x + 24 = 0$

(4) $x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 72x + 168 = 0$

(5) $x^4 + 2x^3 - 3x + 1 = 0$.

---

(4) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_n$ எனில், $\alpha_1 \pm h, \alpha_2 \pm h, \ldots \alpha_n \pm h$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் காணல்.

$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots \ldots + a_n = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு என்க. இதன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_n$ என்க. நாம் $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \ldots \ldots \alpha_n - h$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காணவேண்டும்.

$f(x) \equiv 0$ -ல்

$x = y + h$ எனப் பிரதியிட,

$$f(y + h) = a_0 (y + h - \alpha_1)(y + h - \alpha_2) \ldots\ldots (y + h - \alpha_n)$$

எனப் பெறப்படும்.

இங்கு $y = \alpha_r - h \ (r = 1, 2, \ldots n)$ எனப் பிரதியிட, $f(y + h) = 0$ ஆகும். எனவே $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ எனின், $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \ldots \alpha_n - h$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன் பாட்டைப் பெற, $f(x) = 0$ என்பதில் $x = y + h$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறலாம்.

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$a_0 (y + h)^n + a_1 (y + h)^{n-1} + a_2 (y + h)^{n-2} + \ldots \ldots + a_n = 0 \ldots (1)$$

சமன்பாடு 1ஐ

$$P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \ldots \ldots + P_{n-1} y + P_n = 0 \qquad \ldots (2)$$

என எழுதலாம்.

இங்கு P_0, P_1 ...... P_n என்பன a_0, a_1 ...a_n-ன் சார்புகளாகும்.

$y = x - h$. எனவே சமன்பாடு 2 ஐ

$$P_0 (x-h)^n + P_1 (x-h)^{n-1} + \ldots + P_n = 0 \quad \ldots(3)$$

என எழுதலாம்.

சமன்பாடு (1)-ம், (3)-ம் முற்றொருமைகளாதலால்,

P_0, P_1, ... P_n இவற்றை எளிதில் காணலாம்.

$P_0 = a_0$ என்பது தெளிவு.

சமன்பாடு (3)ஐ $(x-h)$ ஆல் வகுக்க,

$$P_0 (x-h)^{n-1} + P_1 (x-h)^{n-2} + \ldots + P_{n-1}$$

என்பது ஈவாகவும், P_n மீதியாகவும் காணப்படும். எனவே P_nஐப் பெறலாம்.

மறுபடியும், $P_0 (x-h)^{n-1} + \ldots\ldots + P_{n-1}$ ஐ $(x-h)$ ஆல் வகுக்க,

$P_0 (x-h)^{n-2} + P_1 (x-)^{n-3} + \ldots\ldots + P_{n-2}$ என்பது ஈவாகவும், P_{n-1} மீதியாகவும் பெறப்படும்.

இதே முறையைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்தினல், கெழுக்கள் P_1, P_2, ... P_n ஐப் பெறலாம். எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \ldots\ldots + P_n = 0$ ஐப் பெறலாம்.

[குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்கு h அதிகமாக [தீர்வுகளுள்ள] சமன்பாட்டினைக் காண, சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்கு $(-h)$) குறைவான தீர்வுகளுள்ள சமன்பாடு காணவேண்டும். இங்கு நாம் $y = x + h$ அல்லது $x = y - h$ எனப் பிரதியிடவேண்டும்.]

5. பிறிதொருமுறை

இம்முறை டெய்லர் தேற்றத்தைத் தழுவியதாகும்.

அதாவது

$$f(x+h) = f(h) + \frac{x}{1!} f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \cdots$$

$$\cdots \cdots \cdots + \frac{x^n}{n!} f^n (h)$$

என்பதிலிருந்து கெழுக்களைக் காணும் முறையாகும். இங்கு ஒவ்வொன்றின் வகைக் கெழு கண்டு, பின்பு மாற்றியமைக்கப் பட்ட சமன்பாடுகளின் கெழுக்களைக் காணவேண்டும். இம் முறை சிறிது கடினமானதால், முதல் முறையையே பின்பற்று வோம். இம் முறையையும், முதல் முறையையும் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுக்களின் மூலம் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: 1.

$x^4 - 12x^3 + 17x^2 + 7 = 0$-ன் தீர்வுகளைவிட இரண்டு அதிகமாக உள்ள தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$f(x) \equiv x^4 - 12x^3 + 17x^2 + 7$$

$$f^1(x) \equiv 4x^3 = 36x^2 + 34x$$

$$f^2(x) \equiv 12x^2 - 72x + 34$$

$$f^3(x) = 24x - 72$$

$$f^4(x) = 24$$

$$f^1(-2) = 4(-2)^3 - 36(-2)^2 + 34(-2)$$

$$= -32 - 144 - 68$$

$$= -244$$

$$f^2(-2) = 12(-2)^2 - 72(-2) + 34$$

$$= 48 + 144 + 34$$

$$= 226$$

$$f^3(-2) = 24(-2) - 72 = -120$$

$$f^4(-2) = 24.$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 12(-2)^3 + 17(-2)^2 + 7$$

$$= 16 + 96 + 68 + 7$$

$$= 187$$

$$\therefore f(y-2) = f(-2) + \frac{y}{1!} f^1(-2) + \frac{y^2}{21} f^2(-2)$$

$$+ \frac{y^3}{3!} f^3(-2) + \frac{y^4}{4!} f^4(-2)$$

$$= 187 - \frac{244}{1!} y + \frac{226}{2!} y^2$$

$$+ \left(\frac{-120}{3!}\right) y^3 + \frac{24}{4!} y^4$$

$$= y^4 - 20y^3 + 113y^2 - 244y + 187$$

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$x^4 - 20x^3 + 113x^2 - 244x + 187 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைவிட இரண்டு குறைவாக உள்ள தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்கள், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $(x-2)$ ஆல் வகுத்துப் பெறப்படும் மீதிக்குச் சமம் என நாம் அறிவோம்.

முதலில்

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 5$ ஐ $(x-2)$ ஆல் வகுக்க,

2	1	-5	7	-4	5	
		2	-6	2	-4	
	1	-3	1	-2		1

ஈவு: $x^3 - 3x^2 + x - 2$; மீதி 1 எனப் பெறப்படும்.

மறுபடியும் $x^3 - 32^2 + x - 2$ ஐ $(x - 2)$ ஆல் வகுக்க,

2	1	-3	1	-2	
		2	-2	-2	
	1	-1	-1		-4

ஈவு: $x^2 - x - 1$; மீதி -4 எனப் பெறப்படும்.

$x^2 - x - 1$ ஐ $(x - 2)$ ஆல் வகுக்க,

2	1	-1	1	
		2	2	
	1	1		1

ஈவு: $x + 1$; மீதி, 1 எனப் பெறப்படும்.

$x + 1$ஐ $(x - 2)$ ஆல் வகுக்க,

2	1	1	
		2	
	1		3

இங்கு மீதி,

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் 1, 3, 1, −4; 1 ஆகும்.

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$ ஆகும்.

மேலே செயல்படுத்தியதைக் கீழ்க் கண்டவாறு காணலாம். இம் முறையையே நாம் பொதுவாகப் பின் பற்றுவோம்.

2	1	−5	7	−4	5
	0	2	−6	2	−4
	1	−3	1	−2	1
	0	2	−2	−2	
	1	−1	−1	−4	
	0	2	2		
	1	1	1		
	0	2			
	1	3			
	0				
	1				

எடுத்துக்காட்டு 3:

$x^5 + 7 = 0$–ன் தீர்வுகளுக்கு 'ஒன்று' அதிகமாகத் தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

ஒன்று அதிகப்படுத்துவதற்கு, கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டை $(x+1)$ ஆல் வகுத்து, தொடர்ந்து வரும் மீதிகளைக் கொண்டு வேண்டிய சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

-1	1	$+0$	$+0$	$+0$	$+0$	$+7$
	0	-1	$+1$	-1	$+1$	-1
	1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+8$
	0	-1	$+2$	-3	$+4$	
	1	-2	$+3$	-4	$+5$	
	0	-1	$+3$	-6		
	1	-3	$+6$	-10		
	0	-1	$+4$			
	1	-4	$+10$			
	0	-1				
	1	-5				
	0					
	1					

எனவே, மாற்றியமைத்த சமன்பாடு

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 6 = 0$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

$5x^3 - 13x^2 - 12x + 7 = 0$-ன் தீர்வுகளுக்கு 23 குறைவாகத் தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

இங்கு முதலில் 20 குறைவாகத் தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்போம். பின்பு மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்கு மூன்று குறைவாகத் தீர்வுகள் உள்ள சமன்பாட்டைக் காண்போம். அதுவே நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

20	5	−13	−12	+7
	0	100	1740	34580
	5	87	1728	34587
	0	100	3740	
	5	187	5468	
	0	100		
	5	287		
	0			
	5			

எனவே 20 குறைவாக உள்ள தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாடு

$5y^3 + 287y^2 + 5468y + 34587 = 0$ ஆகும்.

இதில் மூன்று குறைவாக உள்ள தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

3	5	287	5468	34587
	0	15	906	19122
	5	302	6374	53689
	0	15	951	
	5	317	7325	
	0	15		
	5	332		
	0			
	5			

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$5x^3 + 332x^2 + 7325x + 53689 = 0$ ஆகும்.

6. குறிப்பிட்ட உறுப்பு நீக்கிய மாற்றமைப்பு முறைகள் (Removal of terms)

இம் மாற்றமைப்பு முறையின் மூலம், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பை நீக்குவதின் மூலம், சமன்பாட்டைத் தீர்க்க எளிதில் வகை செய்யும். இனி இம் முறையைக் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ என்க.

$y = x - h$ எனப் பிரதியிட,

$a_0 (y + h)^n + a_1 (y + h)^{n-1} + \dots + a_n = 0$ எனப் பெறபடும். இதனை,

$$a_0 y^n + (n a_0 h + a_1) y^{n-1}$$

$$+ \left\{\frac{n(n-1)}{2!} a_0 h^2 + (n-1) a_1 h + a_2\right\} y^{n-2} + \dots$$

$$+ \dots = 0$$

என எழுதலாம்.

மாற்றியமைக்கப்பட வேண்டிய சமன்பாட்டில் இரண்டாவது உறுப்பு நீக்கப்பட வேண்டுமானல்

$n a_0 h + a_1 = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $h = -\dfrac{a_1}{n a_0}$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

மூன்ருவது உறுப்பை நீக்க வேண்டுமாயின்,

$\dfrac{n(n-1)}{2!} a_0 h^2 + (n-1) a_1 h + a_2 = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். இது h-ன் இருபடிச் சமன்பாடாகும். எனவே hஐக் காணலாம். இவ்வாறு நிபந்தனைக்குத் தக்கவாறு h-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, அதனைக் கொண்டு மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைப் பெறலாம். இன்னொரு எளிதான முறையை ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் (Binomial coefficients) வழியாகக் காணலாம்.

7. ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் (Binomial coefficients)

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ ஐ

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} x^2 + n a_{-1} x + a_n$$

என எழுதலாம்.

அதாவது,

$$\varphi_n(x) \equiv a_o x^n + n c_1 x^{n-1} a_1 + n c_2 x^{n-2} a_2 + \ldots$$

$$\ldots + nc_n a_n$$

எனக் குறிப்போம்.

இங்கு $x^n, x^{n-1}, \ldots$ -ன் கெழுக்கள் முறையே $a_o,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n,\ n c_0, nc_1, \ldots nc_n$ இவற்றின் பெருக்குத் தொகைகளாகும்.

எனவே,

$$\varphi_n(x) \equiv a_0 x^n + nc_1 a_1 x^{n-1} + nc_2 a_2 x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + n c_n a_n$$

என்பதிலிருந்து,

$$\varphi_{n-1}(x) \equiv a_0 x^{n-1} + (n-1) c_1 a_1 x^{n-1} + (n-1) c_2 a_2 x^{n-2}$$

$$+ \ldots \ldots + a_{n-1}$$

$$\varphi_{n-2}(x) \equiv a_0 x^{n-2} + (n-2) c_1 x^{n-2} a_1 + \ldots \ldots$$

$$\ldots + a_{n-2}$$

... ...

... ...

$$\varphi_4(x) \equiv a_0 x^4 + 4.a_1 x^3 + \frac{4.3}{1.2} a_2 x^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3} x + 1.a_4$$

$$\varphi_3(x) \equiv a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + \frac{3.2}{1.2} a_2 x + a_3$$

... ...

$$\varphi_1(x) \equiv a_0 x + a_1$$

எனக் காண்கின்ரேம்.

இங்கு $\varphi_n(x)$-ன் வகைக்கெழு $n\,\varphi_{n-1}(x)$ எனக் காண்கின்ரேம். ஏனென்ருல்,

$$\varphi_n'(x) = n\, a_0 x^{n-1} + n(n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + n\, a_{n-1}$$

$$= n\{a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\}$$

$$= n.\varphi_{n-1}(x)$$

இதே போல்,

$$\varphi_3'(x) = 3\,\varphi_2(x)$$

$$\varphi_2'(x) = 2\,\varphi_1(x)$$

எனக் காண்கிரேம்.

இதிலிருந்து h குறைந்த தீர்வுகளுடைய மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைக் காண்பது எவ்வாறு எனக் காண்போம்.

$x = x + h$ எனப் பிரதியிட,

$$\varphi_n(x+h) = a_0 (x+h)^n + n\,.\,a_1 (x+h)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 (x+h)^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

எனப் பெறப்படும்.

$$\therefore\quad \varphi_n(x+h) = a_0 x^n + n(a_0 h + a_1) x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(a_0 h^2 + 2 a_1 h + a_2) x^{n-2} + \ldots = 0$$

$$\equiv \varphi_0(h)\, x^n + n \cdot \varphi_1(h)\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \varphi_2(h)\, x^{n-2} + \dots + \varphi_n(h) = 0$$

இங்கு $\varphi_0(h)$, $\varphi_1(h)$, ... $\varphi_n(h)$ என்பன, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... $\varphi_n(x)$ என்பதில் $x = h$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படுகின்றன. இதனைப் பயன்படுத்தி, வேண்டிய மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன் பாட்டினைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டாவது உறுப்பு நீக்கி மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை,

$$a_0 x^3 + 3 c_1 a_1 x^2 + 3 c_2 a_2 x + 3 c_3 a_3 = 0$$

என எழுதலாம். எனவே, h குறைந்த தீர்வுகளை தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டில் இரண்டாவது உறுப்பு

$3\, c_1 \varphi_1(h)\, x^2$ ஆகும்.

$\varphi_1(h) = a_0 h + a_1$

எனவே இரண்டாவது உறுப்பை நீக்க வேண்டுமாயின், $a_0 h + a_1 = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $h = -\frac{a_1}{a_0}$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு, கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டின் தீர்வுகளில் $h = -\frac{a_1}{a_0}$ குறைவாக உள்ளவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்டிருக்கும்.

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$a_0 x^3 + 3 c_2 \left[a_0 \left(\frac{-a_1}{a_0}\right)^2 + 2a_1\left(\frac{-a_1}{a_0}\right) + a_2 \right] x$$

$$+ \left[a_o \left(\frac{-a_1}{a_o}\right)^3 + 3\,a_1 \left(\frac{-a_1}{a_0}\right)^2 + 3\,a_2\left(\frac{-a_1}{a_0}\right) + a_3 \right] = 0$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$a_o\,x^3 + \frac{3\,(a_0\,a_2 - a_1^{\,2})x}{a_o} + \frac{(a_0^{\,2}\,a_3 - 3\,a_o\,a_1\,a_2 + 2\,a_1^{\,3})}{a_o^{\,2}} = 0$$

அல்லது,

$$x^3 + \frac{3\,(a_0\,a_2 - a_1^{\,2})}{a_o^{\,3}}\,x + \frac{(a_0^{\,2}\,a_3 - 3\,a_0\,a_1\,a_2 + 2\,a_1^{\,3})}{a_0^{\,3}} = 0$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4 + 20\,x^3 + 143\,x^2 + 430\,x + 462 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டாம் உறுப்பை நீக்கி மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் h குறைவாக உள்ளவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டில் இரண்டாவது உறுப்பு நீக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம்.

எனவே,

$$(x + h)^4 + 20\,(x + h)^3 + 143\,(x + h)^2 + 430\,(x + h) + 462 = 0$$

என்ற மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில்,

$$4\,h + 20 = 0$$

$$\therefore\ h = -5$$

எனவே வேண்டிய மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைப் பெற, நாம் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் 5 அதிகமாக உள்ள தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண வேண்டும்.

— 5	1	20	143	430	462
	0	— 5	— 75	—340	—450
	1	15	68	90	12
	0	— 5	— 50	— 90	
	1	10	18	0	
	0	— 5	— 25		
	1	5	—7		
	0	— 5			
	1	0			
	0				
	1				

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி

(1) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 17x + 11 = 0$-ன் தீர்வுகளில் நான்கு குறைவாகத் தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(2) $4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$-ன் தீர்வுகளில் இரண்டு அதிகமாகத் தீர்வுகள் கொண்ட சமன் பாட்டினைக் காண்க.

(3) $3x^4 + 7x^3 - 15x^2 + x - 2 = 0$-ன் தீர்வுகளில் 7 அதிகமாக தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(4) $x^4 + 8x^3 + x - 5 = 0$-ன் இரண்டாவது உறுப்பு நீக்கிய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(5) $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 3x + 2 = 0$-ன் மூன்றாவது உறுப்பு நீக்கிய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(6) $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்பதின் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் x^3, x உறுப்புகள் நீக்கப்பட்டிருப்பின்,

$p^3 - 4pq + 8r = 0$ என நிறுவுக.

விடை

(1) $x^4 + 11x^3 + 43x^2 + 55x - 9 = 0$

(2) $4x^5 - 40x^4 + 158x^3 - 308x^2 + 303x - 129 = 0$

(3) $3x^4 - 77x^3 + 720x^2 - 2876x + 4058 = 0$

(4) $x^4 - 24x^2 + 65x - 55 = 0$

(5) $x^4 - 8x^3 + 17x - 8 = 0$.

---

8. முப்படிச் சமன்பாடு (Cubic)

முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகளின் சிறப்புத் தன்மையைக் கருதி நாம் முப்படிச் சமன்பாட்டின் தன்மையைக் காண்போம். ஏற்கெனவே கண்டறிந்த மாற்றமைப்பு முறைகளின் மூலம் நோக்குவோம்.

$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டினை எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டாம் உறுப்பு நீக்கி மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 + 3\frac{(a_0 a_2 - a_1^2)}{a_0^2}x + \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3} = 0$$

என ஏற்கெனவே எடுத்துக்காட்டின் மூலம் அறிந்தோம்.

$$H = a_0 a_2 - a_1^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$G = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

எனவும் குறிப்போம். எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 + \frac{3H}{a_0^2} x + \frac{G}{a_0^3} = 0$$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது $(a_0 x)^3 + 3 H a_0 x + G = 0$ எனப் பெறப்படும்.

இங்கு $y = a_0 x$ எனப் பிரதியிட, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$y^3 + 3 H y + G = 0$ எனப் பெறப்படும்.

இதிலிருந்து, α, β, γ என்பவை எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாயின்,

$x^3 + \frac{3H}{a_0^2} x + \frac{G}{a_0^3} = 0$-ன் தீர்வுகள்

$\alpha + \frac{a_1}{a_0}, \beta + \frac{a_1}{a_0}, \gamma + \frac{a_1}{a_0}$ என்றும்,

$y^3 + 3 H y + G = 0$ -ன் தீர்வுகள்

$(a_0\alpha + a_1), (a_0 \beta + a_1), (a_0 \gamma + a_1)$ என்றும் காணலாம்.

$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின்,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-3 a_1}{a_0}$$

எனவே, $a_0 \alpha + a_1 = a_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_0}\right)$

$$= a_0 \left[\alpha - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right]$$

$$= \frac{a_0}{3}(2\alpha - \beta - \gamma)$$

இதேபோல்,

$$a_0 \beta + a_1 = \frac{a_0}{3}(2\beta - \gamma - \alpha)$$

$$a_0 \gamma + a_1 = \frac{a_0}{3}(2\gamma - \alpha - \beta)$$

எனவே, $x^3 + \frac{3H}{a_0^2}x + \frac{G}{a_0^3} = 0$-ன் தீர்வுகள்

$$\frac{1}{3}(2\alpha - \beta - \gamma), \ \frac{1}{3}(2\beta - \gamma - \alpha),$$

$\frac{1}{3}(2\gamma - \alpha - \beta)$ ஆகும்.

இதிலிருந்து, $\sum (2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)$, $(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta)$ என்ற சமச்சீர் சார்புகளின் மதிப்புகளை உடனடியாக முறையே $27(a_0 a_2 - a_1^2)$, $-27(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)$ எனப்பெறலாம்.

9. நாற்படிச் சமன்பாடு (Biquadratic Equation)

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0 \quad \dots (1)$$

என்ற நாற்படிச் சமன்பாட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இரண்டாவது உறுப்பு நீக்கி மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைப் பெற, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் h குறைவாக உள்ள தீர்வுகளைக்கொண்ட சமன்பாட்டினை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\varphi_0 (h) \cdot x^4 + 4 \varphi_1 (h) x^3 + 6 \varphi_2 (h) x^2$$
$$+ 4 \varphi_3 (h) x + \varphi_4 (h) = 0 \qquad \dots (2)$$

இங்கு

$$\varphi_0 (h) = a_0$$

$$\varphi_1 (h) = a_0 h + a_1$$

$$\varphi_2 (h) = a_0 h^2 + 2a_1 (h) + a_2$$

$$\varphi_3 (h) = a_0 h^3 + 3a_1 h^2 + 3a_2 h + a_3$$

$$\varphi_4 (h) = a_0 h^4 + 4 a_1 h^3 + 6 a_2 h^2 + 4 a_3 h + a_4$$

ஆகும்.

இரண்டாவது உறுப்பை நீக்க வேண்டுமாயின், $a_0 h + a_1 = 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $h = -\dfrac{a_1}{a_0}$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$h = -\dfrac{a_1}{a_0}$ எனப் பிரதியிட,

$$\varphi_1 (h) = 0$$

$$\varphi_2(h) = a_0 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^2 + 2 a_1 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right) + a_2$$

$$= \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0}$$

$$= \frac{H}{a_0}$$

$$\varphi_3 (h) = a_0 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^3 + 3 a_1 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^2$$
$$+ 3 a_2 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right) + a_3$$

$$= \frac{a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3}{a_0^2}$$

$$= \frac{G}{a_0^2}$$

$$\varphi_4(h) = a_0\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^4 + 4 a_1 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^3 + 6a_2 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^2 + 4 a_3 \left(-\frac{a_1}{a_0}\right) + a_4$$

$$= \frac{a_0^3 a_4 - 4 a_0^2 a_1 a_3 + 6 a_0 a_1^2 a_2 - 3 a_1^4}{a_0^3}$$

$$= \frac{1}{a_0^3} \left\{ \begin{array}{l} a_0^2 (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) \\ - 3 a_0^2 a_2^2 + 6 a_0 a_1^2 a_2 - 3 a_1^4 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{a_0^3} \left\{ \begin{array}{l} a_0^2 (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) \\ - 3 (a_0 a_2 - a_1^2)^2 \end{array} \right\}$$

$I = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$ எனப் பிரதியிட,

$\varphi_4(h) = \frac{1}{a_0^3} (a_0^2 I - 3 H^2)$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$a_0 x^4 + \frac{6H}{a_0} x^2 + \frac{4G}{a_0^2} x + \frac{1}{a_0^3} (a_0^2 I - 3H^2) = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$a_0^4 x^4 + 6 H a_0^2 x^2 + 4 G a_0 x + a_0^2 I - 3H^2 = 0$$

$a_0 x = y$ எனப்பிரதியிட,

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$y^4 + 6Hy^2 + 4Gy + a_0^3 I - 3H^2 = 0 \quad \ldots (4)$$

ஆகும்.

இங்கு $h = -\dfrac{a^1}{a_0}$, $y = a_0 x$ ஆகையால்,

அதாவது $y = a_0 \left(x + \dfrac{a_1}{a_0} \right)$ ஆகையால், சமன்பாடு (4) - ன்

தீர்வுகள் $a_0 \alpha + a_1$, $a_0 \beta + a_1$, $a_0 \gamma + a_1$, $a_0 \delta + a_1$ ஆகும்.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{4a_1}{a_0}$$ ஆகும்.

எனவே,

$$a_0 \alpha + a_1 = a_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_0} \right)$$

$$= \left(\alpha - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} \right)$$

$$= \frac{a_0}{4} [3\alpha - \beta - \gamma - \delta]$$

இதேபோல்,

$$a_0 \beta + a_1 = \frac{a_0}{4} [3\beta - \alpha - \gamma - \delta]$$

$$a_0 \gamma + a_1 = \frac{a_0}{4} [3\gamma - \delta - \alpha - \beta]$$

$$a_0 \delta + a_1 = \frac{a_0}{4} [3\delta - \alpha - \beta - \gamma]$$ ஆகும்.

எனவே சமன்பாடு (3) -ன் தீர்வுகள்.

$$\frac{1}{4}(3\alpha - \beta - \gamma - \delta), \frac{1}{4}(3\beta - \alpha - \gamma - \delta),$$

$$\frac{1}{4}(3\gamma - \alpha - \beta - \delta),\ \frac{1}{4}(3\delta - \alpha - \beta - \gamma)$$

ஆகும்.

இத் தீர்வுகளை $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1, \delta^1$ எனக்கொள்வோமாயின்,

$$\alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1 + \delta^1 = 0$$

$$\sum \alpha^1 \beta^1 = \frac{6H}{a_0^2}$$

$$\sum \alpha^1 \beta^1 \gamma^1 = \frac{-4G}{a_0^3}$$

$$\alpha^1 \beta^1 \gamma^1 \delta^1 = 256\,(a_0^2\, \mathrm{I} - 3H^2)$$ ஆகும்.

ஈருறுப்புக்கெழுக்களாலான

$a_0\, a_2\, a_4 + 2\, a_1\, a_2\, a_3 - a_0\, a_3^2 - a_1^2\, a_4 - a_2^3$
என்ற சார்பை J எனக் கொண்டால்

$G^2 + 4H^3 \equiv a_0^2\,(HI - a_0\, \mathrm{J})$ எனப் பெறப்படும்.

10. பொதுவான மாற்றமைப்பு (The general transformation)

$f(x) = 0$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடாகட்டும். மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $g(y) = 0$ என்க. $g(y) = 0$-ன் தீர்வுகள், $f(x) = 0$ என்பதின் தீர்வுகளோடு கொண்ட தொடர்பினை $\varphi(x, y) = 0$ என்க. இப்பொழுது மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைப் பெற, $f(x) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ என்பதில் x ஐ நீக்கி, $f(x) = 0$, என்பதில் x-க்குப் பதிலாக yஐப் பிரதியிடவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β, γ என்க.

$(\beta + \gamma), (\alpha + \beta), (\alpha + \gamma)$ இவற்றினைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்பதாகக்கொள்வோம்.

இங்கு

$$y = \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma - \alpha = p - \alpha$$

எனவே இங்கு $\varphi(x, y) = 0$ என்பது, $y = p - x$ ஆகும். இதனை விரிவாகக் கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் நன்கறியலாம். $\varphi(x, y) = 0$ என்பதை நாம் பொதுத் தொடர்பு என்கிறோம்.

11. முப்படிச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் α, β, γ எனின் $(\alpha - \beta)^2$, $(\beta - \gamma)^2$, $(\gamma - \alpha)^2$ என்பவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காணுதல் (To find the equation of squared differences of a cubic equation.)

α, β, γ — வைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு

$x^3 + qx + r = 0$ என்க ...... (1)

எனவே,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -r.$$

$(\alpha - \beta)^2, (\beta - \gamma)^2, (\alpha - \gamma)^2$ ஐத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண, நாம் பொதுவான மாற்றமைப்பு முறையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு

$$y = (\beta - \gamma)^2$$

$$= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$$

$$= 0 - 2q$$

$$= -2q$$

$$\therefore y = -2q - \alpha^2 + \frac{2r}{\alpha}$$

எனவே பொதுத்தொடர்பு $\varphi(x, y)$ ஆனது,

$$y = -2q - x^2 + \frac{2r}{x} \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது,

$$x^2 + (y + 2q)x - 2r = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{எனவே, } (x^3 + qx + r) + [x^2 + x(y + 2q) - 2r] = 0$$

$$\text{அதாவது } (y + q)x - 3r = 0$$

$$\text{அதாவது } x = \frac{3r}{y + q}$$

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\left(\frac{3r}{q + y}\right)^3 + q\left(\frac{3r}{y + q}\right) + r = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அதாவது, } r(y + q)^3 + 3rq(y + q)^2 + (3r)^3 = 0$$

$$\text{அதாவது, } (y^3 + 3y^2q + 3yq^2 + q^3) + 3q(y^2 + q^2 + 2yq) + 27r^2 = 0$$

அல்லது,

$$y^3 + 6qy^2 + 9q^2y + 4q^3 + 27r^2 = 0 \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad (2)$$

நாம் பொதுவாக

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கிய பின்பு மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$y^3 + \frac{3H}{a_0^2}y + \frac{G}{a_0^3} = 0$$

ஆகும்.

மேலே கண்டவாறு, இச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$(\alpha - \beta)^2$, $(\beta - \gamma)^2$, $(\alpha - \gamma)^2$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண (α, β, γ சமன்பாடு (3)–ன் தீர்வுகளாகட்டும்)

$$q = \frac{3H}{a_0^2}, \quad r = \frac{G}{a_0^3}$$

எனப் பிரதியிட்டுப் பெறலாம். எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$x^3 + \frac{18H}{a_0^2}x^2 + \frac{81H^2}{a_0^4}x + \frac{27}{a_0^6}(G^2 + 4H^3) = 0 \quad \ldots (4)$$

ஆகும்.

சமன்பாடு (4)–ன் தீர்வுகளை a_0^2 ஆல் பெருக்கிக் கண்ட சமன்பாடு

$$x^3 + 18Hx^2 + 81H^2x + 27(G^2 + 4H^3) = 0 \quad \ldots (5)$$

ஆகும்.

எனவே சமன்பாடு (5)–ன் தீர்வுகள்

$$a_0^2(\alpha - \gamma)^2, \; a_0^2(\beta - \gamma)^2, \; a_0^2(\alpha - \beta)^2$$

ஆகும்.

இதிலிருந்து, தீர்வுகளின் பெருக்கற்பலன்

$$a_0^6(\beta - \gamma)^2(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2 = -27(G^2 + 4H^3)$$

$$= -27(HI - a_0 J)\,a_0^2$$

எனப் பெறப்படும்.

[குறிப்பு : இங்கு $I = 4a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$,

$J = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$

ஆகும்.

அதாவது

$$G^2 + 4H^3 = a^{02} \begin{Bmatrix} a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_0 a_2^3 \\ + 4 a_1^3 a_3 - 3 a_1^2 a_2^2 \end{Bmatrix}$$

$$= a_0^2 (H I - a_0 J)$$

$$= a_0^2 \Delta$$

$H I - a_0 J = \Delta$ என்பது முப்படிச் சார்பின், தன்மை காட்டி (discriminant) எனப்படும்.]

12. முப்படிச்சார்பின் தீர்வுகளை ஆராய்தல் (To find the nature of the roots of a cubic).

α, β, γ என்பன

$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின், ... (1)

$a_0^6 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (\alpha - \beta)^2 = -27 (G^2 + 4H^3)$ என்றும், $a_0^2 (\alpha - \beta)^2$, $a_0^2 (\alpha - \gamma)^2$, $a_0^2 (\beta - \gamma)^2$ என்றும் இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$x^3 + 18 H x^2 + 81 H^2 x + 27 (G^2 + 4 H^3) = 0$$

என்றும் பார்த்தோம். ... (2)

இனி இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை ஆராய்வோம்.

(2) -ன் தீர்வுகளின் ஒன்று குறையெண்ணயிருப்பின், $a_0^2 (\alpha - \beta)^2$ .... களில் குறையெண்ணயிருத்தல்வேண்டும். அதாவது α, β, γ -க்களில் ஏதேனும் இரண்டின் வேறுபாடுகளின் இருபடி குறையெண்ணய் இருத்தல்வேண்டும். அப்படியானல் (1) - ன் தீர்வுகளில் ஏதேனும் இரண்டு தீர்வுகள் கற்பனை எண்ணயிருக்கவேண்டும்.

(2) -ன் தீர்வுகளில் ஒன்றும் குறையெண் இல்லையெனின், (1)-ன் தீர்வுகள் மெய்யெண்களாகும்.

இங்கு நாம் நான்கு நிலைகளைக் காண்கின்றேம்.

(1) $G^2 + 4H^3$ என்பது ஒரு குறையெண். எனவே, $a_0^6 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (\alpha - \beta)^2$ நேரெண்ணுகும். எனவே, $(\beta - \gamma)^2$ நேரெண்கவும், $(\gamma - \alpha)^2$, $(\alpha - \beta)^2$ எதிரெண் களாகவும் இருக்கலாம் எனவே $(\gamma - \alpha)$, $(\alpha - \beta)$ கற்பனை யெண்களாகின்றன. அதாவது γ, α; α, β கற்பனையெண் களாகின்றன. ஆனால் இது முரணானது. எனவே $(\beta - \gamma)^2$, $(\gamma - \alpha)^2$, $(\alpha - \beta)^2$ நேர் எண்களாகும். அதாவது α, β, γ மெய்யெண்களாகும்.

(2) $G^2 + 4H^3$ ஒரு நேர் எண். எனவே $(\beta-\gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (\alpha - \beta)^2$ ஒரு குறையெண்ணுகும். எனவே, $(\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2, (\alpha - \beta)^2$ இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று குறையெண்ணுயிருத்தல்வேண்டும். எனவே, ஏதேனும் இரு தீர்வுகளின் வேறுபாடு கற்பனை எண்ணுக இருக்கவேண்டும். எனவே, முப்படிச்சார்புக்கு இரு கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

(3) $G^2 + 4H^3 = 0$

எனவே, $(\beta - \gamma)^2 (\alpha - \beta)^2 (\gamma - \alpha)^2 = 0$. அதாவது, $\alpha, \beta\ \gamma$-க்களில் ஏதேனும் இரண்டு சமமாயிருத்தல் வேண்டும். எனவே, முப்படிச்சார்பின் மூன்று தீர்வுகளில் இரண்டு தீர்வுகள் சமமாயிருக்கும்.

(4) $G = 0, \quad H = 0$

இங்கு மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு

$x^3 = 0$ ஆகும்.

எனவே, $(\alpha - \beta)^2, (\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2$ பூச்சியத்துக்குச் சமமாகும். அதாவது $\alpha = \beta = \gamma$

இங்கு $G = 0$. எனவே

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0 \quad \therefore \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$H = 0 \quad \therefore a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3 = 0$$

$$a_0 = a_1^2 / a_2$$

$$\frac{a_1^4 a_3}{a_2^2} - \frac{3 a_1^3 a^2}{a_2} + 2 a_1^3 = 0$$

அல்லது $\dfrac{a_1^4 a^3}{a_2^3} - a_1^{\,3} = 0$

அல்லது $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{a_2}{a_3}$

எனவே $\dfrac{a_0}{a_1} = \dfrac{a_1}{a3} = \dfrac{a_2}{a_3}$

அதாவது கொடுக்கப்பட்ட முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூன்று தீர்வுகளும் சமம் என்றும், முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூன்று தீர்வுகளும் சமமாயின்,

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$$

என்றும் அறிகின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ என்பன $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$ சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின், $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots \alpha_n^2$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$ -ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ எனின்.

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$$

$$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \quad \ldots \quad (1)$$

$-\alpha_1, -\alpha_2 \ldots -\alpha_n$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$x^n - p_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n p_n$$

$$= (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \ldots (x + \alpha_n) \quad \ldots \quad (2)$$

ஆகும்.

(1) × (2)-ன் பலன்

$$(x^n + p_2 x^{n-2} + p_4 x^{n-4} + \dots)^2$$
$$- (p_1 x^{n-1} + p_3 x^{n-3} + \dots)^2$$
$$\equiv (x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2) \dots (x^2 - \alpha_n^2)$$

அதாவது,

$$x^{2n} + (2p_2 - p_1^2) x^{2n-2} +$$
$$(p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_4) x^{2n-4} + \dots$$
$$\equiv (x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2) \dots (x^2 - \alpha_n^2)$$

இங்கு $y = x^2$ என்ற பொதுத் தொடர்பைப் பயன்படுத்த,

$$y^n + (2p_2 - p_1^2) y^{n-1} + (p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_4) y^{n-2}$$
$$+ \dots + \dots = (y - \alpha_1^2) \dots (y - \alpha_n^2)$$

எனப் பெறப்படும். எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$y^n + (2p_2 - p_1^2) y^{n-1}$$
$$+ (p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_4) y^{n-2} + \dots + \dots$$
$$= 0$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ என்பன $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$-ன் தீர்வுகளாயின், $\alpha_1^3, \alpha_2^3, \dots \alpha_n^3$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$
$$\equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை

$$(p_n + p_{n-3} x^3 + p_{n-6} x^6 + \dots)$$
$$+ x(p_{n-1} + p_{n-4} x^3 + \dots)$$
$$+ x^2(p_{n-2} + p_{n-5} x^3 + \dots) = 0$$

என எழுதலாம்.

இதனை,

$$P + Qx + R\,x^2 = 0 \text{ என்க.}$$

$\therefore$ P, Q, R x–ன் சார்புகளாகும்.

ஒன்றின் முப்படித் தீர்வுகள் $1, \omega, \omega^2$ ஆகும். அதாவது $x^3 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $1, \omega, \omega^2$ ஆகும். எனவே xஐ, ωx, $\omega^2 x$ என முறையே பிரதியிட,

$$P + Qx + R\,x^2 \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \qquad (1)$$
என்பது

$$P + Qw\,x + Rw\,x^2 \equiv (w\,x - \alpha_1)(w\,x - \alpha_2)$$
$$\dots (w\,x - \alpha_n) \qquad \dots \quad (2)$$

$$P + w^2 Q\,x + w\,R\,x^2$$
$$\equiv (\omega^2 x - \alpha_1)(\omega^2\,x - \alpha_2) \dots (\omega^2 - \alpha_n) \qquad \dots \quad (3)$$

எனவாகும்.

(1), 2, (3)ஐப் பெருக்க,

$$(P + Qx + R\,x^2)\;(P + \omega\,Q\,x + \omega^2\,R\,x^2)$$
$$(P + \omega^2\,Q\,x + \omega\,R\,x^2)$$
$$\equiv (x^3 - \alpha_1{}^3)(x^3 - \alpha_2{}^3) \dots (x^3 - \alpha_n{}^3)$$

எனப் பெறப்படும்.

எனவே,

$$P^3 + Q^3\,x^3 + R^3\,x^6 - 3\,x^3\,P\,Q\,R$$
$$= (x^3 - \alpha_1{}^3)(x^3 - \alpha_2{}^3) \dots (x^3 - \alpha_n{}^3)$$

இதிலிருந்து, $y = x^3$ எனப் பிரதியிட்டு, வேண்டிய மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைப் பெறலாம் என்பது தெளிவு.

எனவே $\alpha_1{}^3, \alpha_2{}^3 \dots \alpha_n{}^3$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$P^3 + Q^3 y + R^3 y^2 - 3PQRy = 0$$

ஆகும்.

இங்கு,

$$P \equiv p_n + p_{n-3}\,y + p_{n-6}\,y^2 + \cdots$$

$$Q \equiv p_{n-1} + p_{n-4}\,y + p_{n-7}\,y^2 + \cdots$$

$$R \equiv p_{n-2} + p_{n-5} + p_{n-8}\,y^2 + \cdots$$

ஆகும்

இதனைப் பயன்படுத்தும் வழியாக $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் முப்படித் தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில்,

$$P = 1 - y$$

$$Q = 3 + y$$

$$R = 2$$

என்பதனை, சமன்பாட்டை $x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$ என்ற வடிவத்தில் கொண்டு, மேற்கண்டவற்றைப் பயன் படுத்திப் பெறலாம்.

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$(1-y)^3 + (3+y)^3 y + 2^3 y^2 - 6(1-y)(3+y)y = 0$$

ஆகும். அதாவது,

$$1 - 3y + 3y^2 - y^3 + 27y + 27y^2 + 9y^3$$
$$+ y^4 + 8y^2 - 18y + 12y^2 + 6y^3 = 0$$

அதாவது,

$$y^4 + 14y^3 + 50y^2 + 6y + 1 = 0$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + \quad = 0$ - ன் தீர்வுகளாயின்,

$\alpha - \frac{1}{\beta\gamma}, \beta - \frac{1}{\alpha\gamma}, \gamma - \frac{1}{\alpha\beta}$ வைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

$\alpha, \beta, \gamma, x^3 + px^2 + qx + r = 0$-ன்

தீர்வுகளாதலால்,

$$\alpha + \beta + \gamma = -p$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -r$$

$$\alpha - \frac{1}{\beta\gamma} = \alpha - \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= \alpha - \frac{\alpha}{-r}$$

$$= \alpha + \frac{\alpha}{r}$$

எனவே $y = \alpha - \frac{1}{\beta\gamma}$ எனக் கொள்வோமாயின்,

$y = x + \frac{x}{r}$ என்பது பொதுத் தொடர்பாகும்.

$$\therefore \quad x = \frac{yr}{1+r}$$

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைப் பெற

$p x^3 + qx + r = 0$-ல்

$\frac{yr}{1+r}$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

எனவே, வேண்டிய சமன்பாடு,

$$r^2 y^3 + p r (1 + r) y^2 + q (1 + r)^2 y + (1 + r)^3 = 0$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$-ன் தீர்வுகள α, β, γ எனின், $\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}$, $\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{\alpha^3}$ இவற்றினைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

முதலில் $x = \frac{1}{x}$ எனப் பிரதியிட்டு. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ வைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்போம். எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + 1 = 0$$

(அதாவது), $1 + 2x + 3x^2 + x^3 = 0$

(அதாவது), $x^3 + 1 = -x(2 + 3x)$

(அதாவது), $(x^3 + 1)^3 = -x^3(2 + 3x)^3$

(அதாவது), $(x^3 + 1)^3 = -x^3[8 + 27x^3 + 18x(2 + 3x)]$

$$\therefore \quad (x^3 + 1)^3 = -x^3[8 + 27x^3 - 18(x^3 + 1)] \quad \ldots (1)$$

$$[\because \; x^3 + 1 = -x(2 + 3x),$$

$$18x(2 + 3x) = -18(x^3 + 1)]$$

சமன்பாடு (1)-ல், $x^3 = y$ எனப் பிரதியிட,

$$(y + 1)^3 = -y[8 + 27y - 18(y + 1)]$$

$$= -y(9y - 10) \text{ ஆகும்.}$$

$(y+1)^3 = -y\,(9y-10)$-ன் தீர்வுகள்

$\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}, \frac{1}{\gamma^3}$ ஆகும்.

அதாவது $y^3 + 12y^2 - 7y + 1 = 0$–ன் தீர்வுகள்

$\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}, \frac{1}{\gamma 3}$ ஆகும்.

எனவே,

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} = -12$$

நமக்கு வேண்டிய மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைப் பெற, பொதுமாற்றமைப்பு முறையை இனி மேற்கொள்ளுவோம்.

இங்கும் நாம் பெறும் பொதுத் தொடர்பு $\varphi\,(y, z)$ ஆகும்.

$$z = \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{\alpha^3} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} - \frac{2}{\alpha^3}$$

$$= -12 - \frac{2}{\alpha^3}$$

$$= -12 - 2y$$

$$\therefore \quad y = -\left(\frac{z+12}{2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே வேண்டிய சமன்பாட்டினைப் பெற,

$y^3 = 12y^2 - 7y + 1 = 0$ என்பதில்

y-க்குப் பதிலாக $-\left(\frac{z+12}{2}\right)$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

∴ வேண்டிய சமன்பாடு,

$$-\left(\frac{z+12}{2}\right)^3 + 12\left(\frac{z+12}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{z+12}{2}\right) + 1 = 0$$

(அதாவது) $z^3 + 12z^2 - 172z - 2072 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

α, β, γ என்பன $x^3 - 6x + 7 = 0$-ன் தீர்வுகளாயின், $\alpha^2 + 2\alpha + 3$, $\beta^2 + 2\beta + 3$, $\gamma^2 + 2\gamma + 3$ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$y = \alpha^2 + 2\alpha + 3$ என்க.

α, $x^3 - 6x + 7 = 0$-ன் தீர்வாதலால், இங்கு x-க்கும், y-க்குமிடையேயுள்ள பொதுத் தொடர்பு

$y = x^2 + 2x + 3$ ஆகும்.

அதாவது, $x^2 + 2x + (3 - y) = 0$ ... (1)

(1)ஐ xஆல் பெருக்கி, பெருக்கி வந்ததிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைக் கழிக்க.

$2x^2 + (9 - y)x - 7 = 0$ ... (2)

எனப் பெறுவோம்.

(1), (2)-லிருந்து xஐ நீக்க வேண்டிய சமன்பாடு பெறப்படும்.

(1), (2)-லிருந்து,

$$\frac{x^2}{-14 - (9 - y)(3 - y)} = \frac{x}{7 + 2(3 - y)}$$

$$= \frac{1}{(9 - y) - 4}$$

அதாவது,

$(13 - 2y)^2 = (5 - y)(-y^2 + 12y - 41)$

$$\therefore \quad y^3 - 21y^2 + 153y - 374 = 0$$

என்பது மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x^7 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் α என்பது ஒரு கற்பனைத் தீர்வானால், $\alpha + \alpha^6$, $\alpha^2 + \alpha^5$, $\alpha^3 + \alpha^4$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$x^7 - 1 = 0$$

அதாவது, $(x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$x^7 - 1 = 0$-ன் தீர்வுகளில் ஒன்று α ஆகையால்,

$(\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$ ஆகும்.

$\alpha \neq 1$. ஆகவே

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$\alpha + \alpha^6$, $\alpha^4 + \alpha^3$, $\alpha^2 + \alpha^5$ இவற்றினைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டில், தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை

$(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6)$ ஆகும்.

(1)-லிருந்து,

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = -1$$

$\alpha + \alpha^6$, $\alpha^2 + \alpha^5$, $\alpha^3 + \alpha^4$ இவற்றை முறையே a, b, c என்க.

$$\therefore \quad \sum a = -1$$

$$\Sigma ab = (\alpha + \alpha^6)(\alpha^2 + \alpha^5) + (\alpha + \alpha^6)(\alpha^3 + \alpha^4) + (\alpha^2 + \alpha^5)(\alpha^3 + \alpha^4)$$

$$= \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{11} + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^9 + \alpha^{10} + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^9$$

$$= \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^2$$
$$+ \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha + \alpha^2$$
$$[\because \alpha^7 = 1]$$
$$= 2(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6)$$
$$= 2(-1)$$
$$= -2.$$

$$\sum abc = (\alpha + \alpha^6)(\alpha^2 + \alpha^5)(\alpha^3 + \alpha^4)$$
$$\therefore \sum abc = (\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{11})(\alpha^3 + \alpha^4)$$
$$= \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{11} + \alpha^{14} + \alpha^7 + \alpha^{10}$$
$$+ \alpha^{12} + \alpha^{15}$$
$$= \alpha^6 + \alpha^2 + \alpha^4 + 1 + 1 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha$$
$$= 2 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6$$
$$= 2 - 1$$
$$= 1$$

எனவே வேண்டிய சமன்பாடு,

$$x^3 - (-1)x^2 + (-2)x - 1 = 0$$

அதாவது $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7:

$x^3 - 3x + 1 = 0$-ன் தீர்வுகளில் ஒன்று 'a' ஆயின், $(a^2 - 2)$-ம் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு என நிறுவுக.

வேண்டியதை நிறுவ, $(a^2 - 2)$, $(b^2 - 2)$, $(c^2 - 2)$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்போம்.

$y = a^2 - 2$ என்க.

'a' $x^3 - 3x + 1 = 0$-ன் ஒரு தீர்வாதலால்,

$y = x^2 - 2$ என்பது பொதுத் தொடர்பாகும்.

$\therefore y + 2 = x^2$

$x = \sqrt{y} + 2$

எனவே, வேண்டிய சமன்பாட்டினைப் பெற $x^3 - 3x + 1 = 0$-ல்

$x = \sqrt{y} + 2$ எனப் பிரதியிடவேண்டும்.

$\therefore \quad (y + 2)\, x - 3\, x + 1 = 0.$

$\therefore \quad x\, y - x = - 1$

அதாவது,

$x\,(y - 1) = - 1$

$\therefore x^2\,(y - 1)^2 = 1$

$(y + 2)\,(y^2 - 2y + 1) = 1$

$\therefore \quad y^3 - 2y^2 + y + 2y^2 - 4y + 2 - 1 = 0$

$\therefore \quad y^3 - 3y + 1 = 0$ ஆகும்.

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளும் ஒரே வடிவத்திலிருப்பதினுல், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு $(a^2 - 2)$ –ம் ஒரு தீர்வு எனக் காண்கின்ருேம்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

α, β, γ என்பன $x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ –ன் தீர்வுகளெனின்,

$$\frac{\alpha + 3}{\alpha - 2} + \frac{\beta + 3}{\beta - 2} + \frac{\gamma + 3}{\gamma - 2}$$ –ன்

மதிப்பைக் காண்க.

வேண்டியதைப் பெற நாம்,

$\frac{\alpha + 3}{\alpha - 2}, \frac{\beta + 3}{\beta - 2}, \frac{\gamma + 3}{\gamma - 2}$ வைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

இங்கு,

$$y = \frac{\alpha + 3}{\alpha - 2} \text{ எனக்கொள்வோமாயின்,}$$

$$y = \frac{x + 3}{x - 3} \text{ — என்பது பொதுத் தொடர்பாகும்.}$$

$\therefore \quad \alpha, \beta, \gamma - x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$ -ன் தீர்வுகளாகும்.

$$\therefore \quad y(x - 2) = (x + 3)$$

$$x(y - 1) = 2y + 3$$

$$\therefore \quad x = \frac{2y + 3}{y - 1}$$

∴ வேண்டிய சமன்பாட்டினைப் பெற,

$x = \dfrac{2y + 3}{y - 1}$ என, சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட வேண்டும்.

அதாவது,

$$\left(\frac{2y + 3}{y - 1}\right)^3 + 2\left(\frac{2y + 3}{y - 1}\right)^2 - \left(\frac{2y + 3}{y - 1}\right) - 3 = 0$$

(அதாவது)

$$(2y + 3)^3 + 2(2y + 3)^2 (y - 1) - (2y + 3)(y - 1)^2$$

$$- 3(y - 1)^3 = 0$$

அதாவது

$$8y^3 + 36y^2 + 18y + 8$$

$$- 8y^3 + 16y^2 - 6y - 18$$

$$- 2y^3 + 4y + y^2 - 3$$

$$- 3y^3 + 9y^2 - 9y + 3 = 0$$

அதாவது

$11y^3 + 62y^2 + 7y - 10 = 0$ நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

$\frac{\alpha + 3}{\alpha - 2}, \frac{\beta + 3}{\beta - 2}, \frac{\gamma + 3}{\gamma - 2}$ இதன் தீர்வுகளாதலால்,

$$\frac{\alpha + 3}{\alpha - 2} + \frac{\beta + 3}{\beta - 2} + \frac{\gamma + 3}{\gamma - 2}$$

$$= -\frac{62}{11} \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி

(1) $x^3 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $\beta\gamma + \alpha, \quad \gamma\alpha + \beta, \quad \alpha\beta + \gamma$

(ii) $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), (\beta - \gamma), (\beta - \alpha),$

$(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$

(iii) $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

(iv) $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$

(v) $\frac{1}{\beta + \gamma - \alpha}, \frac{1}{\gamma + \alpha - \beta}, \frac{1}{\alpha + \beta - \gamma}$

(vi) $\alpha\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \beta\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right), \gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

(vii) $\frac{\beta\gamma - \alpha^2}{\beta + \gamma - 2\alpha}, \frac{\gamma\alpha - \beta^2}{\gamma + \alpha - 2\beta}, \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\alpha + \beta - 2\gamma}$

(viii) $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha}, \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\beta}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma}$

(2) α, β, γ என்பன $x^3 + p x^3 + q x + r = 0$-ன் தீர்வுகளெனின், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$

(ii) $\alpha^2 + \alpha, \beta^2 + \beta, \gamma^2 + \gamma$

(iii) $\alpha (\beta + \gamma,) \beta (\gamma + \alpha), \gamma (\alpha + \beta)$

(iv) $\beta^2 + \gamma^2, \gamma^2 + \alpha^3, \alpha^2 + \beta^2$

(v) $\alpha + \frac{1}{\beta \gamma}, \beta + \frac{1}{\alpha \gamma} \gamma, + \frac{1}{\alpha \beta}$

(3) α, β, γ என்பன $x^3 - 3x + 1 = 0$-ன் தீர்வுகளாயின், கீழ்க்கண்டவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(i) $\alpha - 2, \beta - 2, \gamma - 2$

(ii) $(\alpha - 2)^2, (\beta - 2)^2, (\gamma - 2)^8$

(iii) $\frac{1}{(\alpha - 2)^2}, \frac{1}{(\beta - 2)^2}, \frac{1}{(\gamma - 2)^2}$

(4) α, β, γ என்பன $x^3 - p x^2 + q x - r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால், கீழ்க்கண்டவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $\alpha \beta + \frac{1}{\gamma}, \beta \gamma + \frac{1}{\alpha}, \alpha \gamma + \frac{1}{\beta}$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha}, \frac{\beta}{\alpha + \gamma - \beta}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$

(5) α, β, γ என்பன $x^3 + q x + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாயின், கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right)$

(ii) $\dfrac{1}{\beta + \gamma - \alpha} + \dfrac{1}{\gamma + \alpha - \beta} - \alpha \dfrac{1}{\alpha + \beta - \gamma}$

(iii) $(\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 (\alpha - \beta)^2$

(6) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 5x + 10 = 0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனில்,

$$(\alpha^2 + 2) + (\beta^2 + 2) + (\gamma^2 + 2) = 166$$ என நிறுவுக.

(7) α, β, γ என்பன $x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின்,

$$\frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2} + \frac{\beta^2}{(\beta + 1)^2} + \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1)^2} = 13$$

என நிறுவுக.

(8) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின்,

$$(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)(1 + \gamma^2)(1 + \delta^2)$$
$$= (s - q + 1)^2 + (r - p)^2$$

என நிறுவுக.

(9) α, β, γ என்பவை $a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a^3 = 0$-ன் தீர்வுகளானால்,

$$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta)$$
$$= \frac{-27(a_0^3\, a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)}{a_0^3}$$

என நிறுவுக.

(10) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு 'θ' ஆனால், $\theta^2 - 2$ மற்றொரு தீர்வு என நிறுவுக.

(11) $x^2(x + 1)^2 - K(x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு α ஆனால், $\dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$-ம் ஒரு தீர்வு என நிறுவுக.

(12) $x^4 + ax^3 - 6x^2 - ax + 1 =$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு α எனின், $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$-ம் ஒரு தீர்வு எனவும், மற்ற இரு தீர்வுகள் $-\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ என நிறுவுக.

(13) α, β, γ என்பன $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின், $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$a^3 y^3 + 3y^2 (a^2 d + 9b^3 - 9abc)$$

$$+ 3y(ad^2 + 9c^3 - 9bcd) + d^3 = 0$$

என நிறுவுக.

(14) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன,

$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின், $(\beta\gamma + \alpha\delta)$, $(\gamma\alpha + \beta\delta)$, $(\alpha\beta + \gamma\delta)$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க. மாற்றியமைக்கப் பட்ட சமன்பாட்டில் இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கியும், தீர்வு களை $\frac{a_0}{2}$ ஆல் பெருக்கியும் பெறப்படும் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 - xI + 2J = 0$$

என நிறுவுக.

(15) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வு களின் வேறுபாடுகளின் இருபடிகளைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாட்டுகளைக் காண்க.

(i) $x^3 - 7x + 6 = 0$

(ii) $x^3 + 6x^2 + 7 + 2 = 0$

(iii) $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

விடை

(1) (i) $y^3 - qy^2 + (q+3r)y + r - (q+r)^2 = 0$

(ii) $y^3 + 3qy^2 - (4q^3 + 27r^2) = 0$

(iii) $r^2y^3 + 3r^2y^2 + (3r^2+q^3)y + (r^2 + 2q^3) = 0$

(iv) $y^3 + 3ry^2 + (q^3+3r^2)y + r^3 = 0$

(v) $8ry^3 - 49y^2 - 1 = 0$

(vi) $r^2y^3 + 3r^2y^2 + (3r^2 + q^3)y + r^2 = 0$

(vii) $27ry^3 - 9q^2y^2 + q^3 = 0$

(viii) $ry^3 - 2q^2y^2 - 5qy - (r^2+2q^3) = 0.$

(2) (i) $y^3 + (2q-p^2)y^2 + (q^2-2p)y - r^2 = 0$

(ii) $y^3 + (2q + p - p^2)y^2 + (q^2+q + 3r - pq - 2pr)y$
$+ r(q+1 - p - r) = 0$

(iii) $y^3 - 2qy^2 + (q^2 + p)y + (r^2 - pq) = 0$

(iv) $y^3 - 2(p^2-2q)y^2 + (p^4 + 4p^2q + 5q^2 - 2pr)y$
$- (p^2q^2 - 2p^3r + 4pqr - 2q^3 - r^2) = 0$

(v) $r^2y^3 - rp(1-r)y^2 + q(1-r)^2y - (1-r)^3 = 0$

(3) (i) $y^3 + 6y^2 + 9y + 3 = 0$

(ii) $z^3 - 18z^2 + 45z - 9 = 0$

(iii) $9y^3 - 45y^2 + 18y - 1 = 0$

(4) (i) $ry^3 - q(1+r)y^2 + p(1+r)^2y - (1+r)^3 = 0$

(ii) $(p^3 - 4pq + 8r)y^3 + (p^3 - 4pq + 12r)y^2$
$+ (6r - pq)y + r = 0$

(5) (i) $-\dfrac{(r^2 + 2q^3)}{r^2}$

(ii) $\dfrac{q}{2r}$ (iii) $-(4q^3 + 27r^2)$

(15) (i) $x^3 - 42x^2 + 441x - 400 = 0$

(ii) $x^3 - 30x^2 + 225x - 68 = 0$

(iii) $x^3 - 18x^2 + 81x = 0$

5 சமச்சீர் சார்புகள்

(Symmetric Functions)

$x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ என்ற மாறிகளால் ஆன ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில், ஒன்றிற்குப் பதிலாக மற்றொன்றை எம்முறையில் மாற்றினாலும், அது மாறாதிருக்குமாயின், அதனைச் சமச்சீர் பல்லுறுப்புக் கோவை (Symmetric Polynomial) என்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma,$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma,$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum \alpha_1$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 = \sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

என்பன சமச்சீர் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் அல்லது சமச்சீர் சார்புகளாகும்.

$$\sum \alpha_1 = f_1, \quad \sum \alpha_1\alpha_2 = f_2$$

$$\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = f_3,$$

... ...

... ...

$\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n = f_n$ என்பன தொடக்க சமச்சீர் சார்புகளாகும். (Elementary symmetric functions)

இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α_1 α ...α_n எனின், α_1, α_2, ...α_n களால் ஆகிய சமச்சீர் சார்பின் மதிப்பைக் காண்பது நமது நோக்கமாகும்.

1. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளால் ஆகிய சமச்சீர் சார்பினை அதன் கெழுக்களின் சார்பாகக் காணல் (To express symmetric function of the roots of a given equation in terms of its coefficients)

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ என்பன

$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக் கொள்வோம்.

நாம் முன்பு கண்டபடி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளால் ஆகிய சமச்சீர் சார்புகளாவன:

$$\Sigma \alpha_1 = -p_1$$

$$\sum \alpha_1\alpha_2 = p_2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n p_n$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

என்ற வடிவத்தில் இருப்பின், தீர்வுகளால் ஆகிய சமச்சீர் சார்புகள்

$$\sum \alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\sum \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

என்பனவாகும். இவற்றை முறையே $E_1\, E_2 \ldots E_n$ எனக் குறிக்கலாம்.

2. விகிதமுறு சமச்சீர் சார்புகள் (Rational symmetric functions)

$x_1, x_2, \dots x_n$ என்ற மாறிகளால் ஆகிய

$$\frac{\varphi\ (x_1, x_2 \dots\dots x_n)}{g\ (x_1, x_2, \dots\dots x_n)}$$

என்ற விகிதமுறு சார்பானது, மாறிகளின் எல்லாவிதமான வரிசை மாற்றங்களுக்கும் (Permutations) மாறுதிருக்குமாயின், அச்சார்பை விகிதமுறு சமச்சீர் சார்பு என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$$

என்பது, α, β, γ–க்களாகிய விகிதமுறு சமச்சீர் சார்பாகும்.

[**குறிப்பு:** மேலே கூறப்பட்ட சமச்சீர் சார்புகளின் மாறிகள் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்பொழுது, அதாவது எண்களாகும்பொழுது, அவைகள் திட்டமான எண்களாகின்றன. ஆகவே, அவற்றைச் சார்புகள் என வழங்குவது தவறுதான். எனினும், வழக்கத்தில் அவற்றைச் சார்புகளாக ஏற்றுக்கொண்டுள்ளோம்.]

3. $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகிய சமச்சீர் சார்புகளில், தொடக்க சமச்சீர் சார்புகளைச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களின் மூலம் காண்பதை அறிவோம். இங்கு மேலும் சில சமச்சீர் சார்புகளைச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களின் மூலம் எவ்வாறு காண்பது எனக் காண்போம். இங்கு நாம் சிலவற்றையே எடுத்துக்காட்டாகக் காண்கின்றோம். மற்றவற்றைப் பழக்கத்தில் எளிதில் பின்பு அறிந்துகொள்ளலாம்.

(1) $\sum \alpha_1 = -p_1$

(2) $\sum \alpha_1^2 = (\sum \alpha_1)^2 - 2\sum \alpha_1 \alpha_2$

$$= p_1^2 - 2p_2$$

(3) $\sum \alpha_1^3 = \sum \alpha_1^2 \sum \alpha_1 - \sum \alpha_1^2\ \alpha_2$

$$= \sum \alpha_1^2 \sum \alpha_1 - \{ \sum \alpha_1 \sum \alpha_1 \alpha_2 - 3 \sum \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \}$$

$$= (p_1^2 - 2 p_2)(- p_1) - (3 p_3 - p_1 p_2)$$

$$\sum \alpha_1^3 = 3p_1 p_2 - p_1^3 - 3 p_3.$$

இன்னும் இது போன்றவற்றை எளிதாகக் கண்டறியலாம். கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுக்களின் மூலம் சிலவற்றைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன

$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 5x + 10 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாயின், (1) $\sum \alpha^2$, (2) $\sum \alpha^2 \beta\gamma$, (3) $\sum \alpha^2 \beta^2$, (4) $\sum \alpha^3 \beta$, (5) $\sum \alpha^4$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன

$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 5x + 10 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாதலால்,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \sum \alpha = 7$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \sum \alpha\beta = 8$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\beta\delta = \sum \alpha\beta\gamma = 5$$

$\alpha\beta\gamma\delta = 10$ ஆகும்.

(1) $\sum \alpha^2 = (\sum \alpha)^2 - 2 \sum \alpha\beta$

$$= (7)^2 - 2 \times 8$$

$$= 49 - 16$$

$$= 33.$$

(2) $\sum \alpha^2 \beta\gamma = \sum \alpha\beta\gamma \sum \alpha - 4 \alpha\beta\gamma\delta$

$$= 5.7 - 4.10$$

$$= -5.$$

(3) $\Sigma\,\alpha^2\beta^2 = (\Sigma\,\alpha\beta)^2 - 2\,\Sigma\,\alpha^2\beta\gamma - 6\,\alpha\beta\gamma\delta$

$= (8)^2 - 2\,(-5) - 6.5$

$= 64 + 10 - 30$

$= 44$

(4) $\Sigma\,\alpha^3\beta = (\Sigma\,\alpha^2)\,(\Sigma\,\alpha\beta) - \Sigma\,\alpha^2\beta\gamma$

$= (33)\,(8) - (-5)$

$= 264 + 5$

$= 269.$

(5) $\Sigma\,\alpha^4 = (\Sigma\,\alpha^2)^2 - 2\,\Sigma\,\alpha^2\beta^2$

$= (33)^2 - 2\,(44)$

$= 1089 - 88$

$= 1001$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β, γ என்பன $x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0$-ன் தீர்வுகளானால், $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma) = r - pq$ என நிறுவுக.

α, β, γ என்பன,

$x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

எனவே, $\alpha + \beta + \gamma = -p$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = q$

$\alpha\beta\gamma = -r$

$$\therefore\ (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

$$= \left\{ (\alpha + \beta + \gamma - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma - \beta) \right\}$$

$$= (-p - \gamma)(-p - \alpha)(-p - \beta)$$

$$= -(p + \gamma)(p + \alpha)(p + \beta)$$

$$= -\left\{ p^3 + p^2(\alpha + \beta + \gamma) + p\,(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \alpha\beta\gamma \right\}$$

$$= -\{p^3 + p^2(-p) + p\,(q) - r\}$$

$$= r - p\,q.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\alpha, \beta, \gamma,\ x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின்,

$(\alpha^2 - \beta\gamma)\ (\beta^2 - \gamma\alpha)\ (\gamma^2 - \alpha\beta)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

இதிலிருந்து α, β, γ பெருக்குத் தொடரில் இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

$\alpha, \beta, \gamma,\ x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$-ன் தீர்வுகள்.

$$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = -p_1$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = p_2$$

$$\alpha\beta\gamma = -p_3$$

$$\therefore (\alpha^2 - \beta\gamma)(\beta^2 - \gamma\alpha)(\gamma^2 - \alpha\beta)$$

$$= \Sigma\alpha^4\beta\gamma - \sum\alpha^3\beta^3$$

$$= \alpha\beta\gamma\,\Sigma\alpha^3 - \sum\alpha^3\beta^3$$

$$\Sigma\alpha^3 = (\Sigma\alpha)^3 - 3(\Sigma\alpha)(\Sigma\alpha\beta) - 3\alpha\beta\gamma$$

$$\sum\alpha^3 = \ = -p_1^3 - 3(-p_1)(p_2) - 3(-p_3)$$

$$= -p_1^3 + 3p_1p_2 + 3p_3$$

$$\Sigma\alpha^3\beta^3 = (\sum\alpha\beta)^3 - 3(\sum\alpha\beta)(\Sigma\alpha^3\beta\gamma) - 3\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

$$= (\sum\alpha\beta)^3 - 3\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha)(\sum\alpha\beta) - 3(\alpha\beta\gamma)^2$$

$$= p_2^3 - 3(-p_3)(p_2)(-p_1) - 3p_3^2$$

$$= p_2^3 - 3p_1p_2p_3 - 3p_3^2$$

$$\therefore \pi(\alpha^2 - \beta\gamma) = -p_3(-p_1^3 + 3p_1p_2 + 3p_3)$$

$$-p_2^3 + 3p_1p_2p^3 + 3p_3^2$$

$$= p_1^3p_3 - p_2^3$$

α, β, γ பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமானால், $(\alpha^2-\beta\gamma)$ $(\beta^2-\gamma\alpha)$, $(\gamma^2-\alpha\beta)$ இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியத்துக்குச் சமமாகவேண்டும். எனவே, இம் மூன்றின் பெருக்குத் தொகை பூச்சியத்துக்குச் சமமாகும்.

$\therefore \ \pi\ (\alpha^2-\beta\gamma)=0$ ஆகும்.

அதாவது $p_1^3 p_3 - p_2^3 = 0$ என்பது வேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

$\alpha, \beta, \gamma,\ x^3-4x^2-x+2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாயின், $\sum \alpha^2\beta$, $\sum \frac{1}{\alpha^2}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta\ \ x^3-4x^3-x+2=0$ -ன் தீர்வுகளாதலால்,

$$\alpha+\beta+\gamma=4$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-1$$

$$\alpha\beta\gamma=-2$$

$$\sum \alpha^2\beta = \sum\alpha\beta\ \sum\alpha - 3\alpha\beta\gamma$$

$$=(-1)(4)-3(-2)$$

$$=2.$$

$$\sum\frac{1}{\alpha^2} = \left(\sum\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\sum\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=\left(\frac{\sum\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)^2 - 2\frac{\sum\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\left(\frac{-1}{-2}\right)^2 - 2\times\frac{4}{-2}$$

$$=4\frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

α, β, γ என்பன $x^3+px^2+qx+r=0$-ன் தீர்வுகளாயின், $(\beta+\gamma-2\alpha), (\gamma+\alpha-2\beta), (\alpha+\beta-\gamma)$ என்பவற்றைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

S_1 = தீர்வுகளின் கூட்டல்

$$= \beta+\gamma-2\alpha+\gamma+\alpha-2\beta+\alpha+\beta-2\gamma$$

$$= 0$$

$$S_2 = \sum(\beta+\gamma-2\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)$$

$$= \sum(\alpha+\beta+\gamma-3\alpha)(\alpha+\beta+\gamma-3\beta)$$

$$\sum(-p-3\alpha)(-p-3\beta)$$

$$\therefore S_2 = \sum(p+3\alpha)(p+3\beta)$$

$$= 3p^2+6p(\alpha+\beta+\gamma)+9(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$$

$$= 3p^2+6p(-p)+9q$$

$$= 9q-3p^2.$$

$$S_3 = (\beta+\gamma-2\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma-3\alpha)(\alpha+\beta+\gamma-3\beta)(\alpha+\beta+\gamma-3\gamma)$$

$$= (-p-3\alpha)(-p-3\beta)(-p-3\gamma)$$

$$= -(p+3\alpha)(p+3\beta)(p+3\gamma)$$

$$= -\left\{\begin{array}{l} p^3+3p^2(\alpha+\beta+\gamma) \\ \quad +9p(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-27\alpha\beta\gamma \end{array}\right\}$$

$$= \{p^3+3p^2(-p)+9p(q)+27(-r)\}$$

$$= 2p^3-9pq+27r.$$

∴ வேண்டிய சமன்பாடு

$$x^3 - S_1 x^2 + S_2 x - S_3 = 0.$$

அதாவது

$$x^3 + (9q - 3p^2)x - (2p^3 - 9pq + 27r) = 0$$

ஆகும்.

பயிற்சி

(1) α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகளாயின், $\sum \alpha^2$, $\sum \alpha^2 \beta$, $\sum \alpha^3$, $\sum \frac{1}{\alpha}$, $\sum \frac{1}{\alpha\beta}$, $\sum \beta^2\gamma^2$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(2) α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகளானால்,

$$\sum \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta\gamma}, \quad \sum \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$$ -ன்

மதிப்புகளைக் காண்க.

(3) α, β, γ என்பன $x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$-ன் தீர்வுகளானால், $\Sigma \alpha^2 \beta^2$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(4) α, β, γ என்பன $x^3 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகளானால் $\sum \frac{1}{\beta + \gamma}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(5) α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகளானால், $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = r - pq$ என நிறுவுக.

(6) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$-ன் தீர்வுகளானால் (i) $\sum \frac{1}{\alpha}$, (ii) $\sum \frac{1}{\alpha\beta}$, (iii) $\sum \frac{1}{\alpha^2}$, (iv) $\sum \frac{\alpha}{\beta\gamma}$, (v) $\sum \alpha^2$, (vi) $\Sigma \alpha^2 \beta$, (vii) $\Sigma \alpha^2 \beta\gamma$ (viii) $\sum \alpha^2 \beta^2$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

(7) α, β, γ, என்பன $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால், $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ என்பனவற்றைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(8) α, β, γ என்பன $a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால்

$$(\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 18\ (a_1^2 - a_0 a_2)$$

என நிறுவுக.

(9) α, β, γ, என்பன $x^3 - 3ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால்,

$$\Sigma (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 9a \text{ என நிறுவுக.}$$

(10) α, β, γ, என்பன, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால் (i) $(\alpha + \beta), (\beta + \gamma), (\gamma + \alpha)$ (ii) $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \gamma(\alpha + \beta)$ வைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(11) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ என்பன $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால்,

$$\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (n-1)\,p_1^2 - 2np_2 \text{ என நிறுவுக.}$$

(12) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின், $\Sigma(\alpha^2 + 1)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

விடை

(1) $p^2 - 2q;\ 3r - pq;\ 3pq - 3r - p^3;$

$$\frac{p}{r};\ q^2 - 2pr;\ -\frac{q}{r}.$$

(2) $\dfrac{pq}{r} - 3;\ \dfrac{p^2 - 2q}{r^2}$

(3) 17. (4) $\dfrac{q}{r}$

(6) (i) $-\dfrac{r}{s}$; (ii) $\dfrac{q}{s}$; (iii) $\dfrac{r^2 - 2qs}{s^2}$,

(iv) $\frac{3r - pq}{s}$; (v) $p^2 - 2q$; (vi) $3r - pq$;

(vii) $pr - 4s$; (viii) $q^2 - 2pr + 2s$.

(7) $x^3 - 6x^2 + acx - c^3 = 0$.

(10) (i) $x^3 + 2px^2 + (p^2 + q)x + pq - r = 0$

(ii) $x^3 - 2qx^2 + (q^2 + pr)x + r^2 - pqr = 0$.

(12) $(r - p)^2 + (q - 1)^2$

---

3. **தேற்றம்:**

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ எனின்,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x - \alpha_n}$$

இங்கு $f(x) = 0$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு.

$fx = 0$-ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ எனில், அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி

$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots\ldots(x - \alpha_n)$ ஆகும்.

இங்கு a_0 ஒரு மாறலியாகும்.

இரு புறமும் மடக்கை காண,

மடக்கை $f(x) =$ மடக்கை $\{a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)\}$

$=$ மடக்கை $a_0 +$ மடக்கை $(x - \alpha) + \ldots +$ மடக்கை $(x - \alpha_n)$

இருபுறமும் x ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காண,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x - \alpha_n}$$

எனக் காண்கின்றோம்.

4. $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ என்பன தீர்வுகளானல்,

$$S_r = \alpha_1^r + \alpha_2^r + \ldots + \alpha_n^r = \sum \alpha^r$$ -ன்

மதிப்பு $\dfrac{x f'(x)}{f(x)}$ -ன் விரிப்பில் x^{-r} -ன் குணகத்திற்குச் சமமாகும்.

$f(x) = 0$ ன் தீர்வுகள் $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ஆயின்,

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

§ 3–ன்படி,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

$$\therefore \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x-\alpha_1} + \frac{x}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{x}{x-\alpha_n}$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{\alpha_1}{x}} + \frac{1}{1-\dfrac{\alpha_2}{x}} + \ldots + \frac{1}{1-\dfrac{\alpha_n}{x}}$$

ஈருறுப்புத் தேற்றத்திணப் பயன்படுத்தி வலப்புறமுள்ள உறுப்புகளை ஒவ்வொன்ருகப் பிரித்தெழுதி, பிறகு பத்தி பத்தியாகக் கூட்ட

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = 1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_1^2}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_1^r}{x^r} + \ldots$$

$$+ 1 + \frac{\alpha_2}{x} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha^2} + \dots + \frac{\alpha_2^r}{x^r} + \dots$$

$$+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$+ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$+ 1 + \frac{\alpha_n}{x} + \frac{\alpha_n^2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_n^r}{x^r} + \dots$$

$$= n + \frac{1}{x}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

$$+ \frac{1}{x^2}(\alpha_1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)$$

$$+ \quad \dots \quad \dots \quad + \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$+ \frac{1}{x^r}(\alpha_1 + \alpha_2^r + \dots \alpha_n^r) + \dots$$

$$\frac{x f'(x)}{-f(x)} = n + \frac{S_1}{x} + \frac{S_2}{x^2} + \dots + \frac{S_r}{x^r} + \dots$$

எனவே S_r, $\frac{x f'(x)}{f(x)}$-ன் x^{-r}-ன் கெழுவுக்குச் சமமாகும்.

5. நியூட்டன் தேற்றம் (Newton's Theorem)

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ தீர்வுகளானால், கீழ்க் காணும் முடிவுகள் உண்மையாகும்.

(i) $r < n$ ஆனால்,

$$S_1 + p_1 = 0$$

$$S_2 + p_1 S_1 + 2 p_2 = 0$$

$$S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3 p_3 = 0$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \dots + r p_r = 0.$$

(ii) $r \geq n$ ஆனல்

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \dots p_n S_{r-n} = 0$$

நிரூபணம் :

(i) $r < n$

$$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

$$\therefore \quad \frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \dots + x\frac{1}{x-\alpha_n}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2}$$

$$+ \dots + \frac{f(x)}{x-\alpha_n} \qquad \dots \quad (1)$$

முதலில் $\dfrac{f(x)}{x-\alpha_1}$ ஐக் காண்போம்.

$$x - \alpha_1 \,\Big)\, x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p^n \Big(x^{n-1} + (p_1 + \alpha) x^{n-2}$$

$$x^n - \alpha_1 x^{n-1} \qquad\qquad + (p_2 + p_1 \alpha_1 + \alpha_1^2) x^{n-2} + \dots$$

$$(p_1 + \alpha_1) x^{n-1} + p_2 x^{n-2}$$

$$(p_1 + \alpha_1) x^{n-1} - \alpha_1 (p_1 + \alpha_1) x^{n-2} + \dots$$

$$(p_2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_1^2) x^{n-2} + p_3 x^{n-3}$$

$$(p_2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_1^2) x^{n-2} - \alpha (p_2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_1^2) x^{n-3} + \dots$$

$$(p_3 + p_2 \alpha_1 + p_1 \alpha_1^2 + \alpha_1^3) x^{n-3}$$

இதனைத் தொடர்ந்தால்,

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha_1)} = x^{n-1} + (p_1 + \alpha_1) x^{n-2} + (p_2 + p_1 \alpha_1$$

$$+ \alpha_1^2) x^{n-3} + (p_3 + p_2 \alpha_1 + p_1 \alpha_1^2 + \alpha_1^3) x^{n-4}$$

$$+ \dots \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வாறு, (1)-ல் உள்ள $\frac{f(x)}{x-\alpha_2}$, $\frac{f(x)}{x-\alpha_3}$, ...

எல்லாவற்றிற்கும் காணலாம். அவற்றை (1)-ல் பதிலீடு செய்தால்,

$$f'(x) = x^{n-1} + (p_1 + \alpha_1)x^{n-2} + (p^2 + \alpha_1 + \alpha_1^2)x^{n-3} + \ldots$$

$$+ x^{n-1} + (p_1 + \alpha_2)x^{n-2} + (p_2 + p_1\alpha_2 + \alpha_2^2)x^{n-3} + \ldots$$

$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$+ x^{n-1} + (p_1 + \alpha_n)x^{n-2} + (p_2 + p_1\alpha_n + \alpha_n^2)x^{n-3} + \ldots$$

$$\therefore \quad f'(x) = n x^{n-1} + (n p_1 + S_1)x^{n-2}$$

$$+ (a p_2 + p_1 S_1 + S_2)x^{n-3} + \ldots$$

$$+ \ldots \quad \ldots$$ ஆகும். ... (2)

$$f'(x) = n x^{n-1} + p_1(n-1)x^{n-2}$$

$$+ p_2(n-2)x^{n-3} + \ldots + \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3)-ல் சமப்படிகளின் குணகங்களைச் சமப்படுத்தினால்,

$$S_1 + n p_1 = p_1(n-1)$$

$$\therefore \quad S_1 + n p_1 - n p_1 + p_1 = 0$$

$$\therefore \quad S_1 + p_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$S_2 + p_1 S_1 + n p_2 = p_2(n-2)$$

$$\therefore \quad S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$S_r + p_1 S_{r-1} + \ldots + n p_r = p_r(n-r)$$

$$\therefore \quad S_r + p_1 S_{r-1} + \dots + n p_r - n p_r + r p_r = 0$$

$$\therefore \quad S_r + p_1 S_{r-1} + \dots + r p_r = 0$$

ஆகும்.

(ii) $(r \geq n)$ இங்கு $r = n + k$ ஆகும்.

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ என்பன $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகளாதலால்,

$$\alpha_1^n + p_1 \alpha_1^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

α^k ஆல் பெருக்கினால்,

$$\alpha_1^{n+k} + p_1 \alpha_1^{n+k-1} + \dots + p_n \alpha^k = 0$$

$$\therefore \quad \alpha_1^r + p \alpha_1^{r-1} + \dots + p_n \alpha^{r-n} = 0$$

இது போலவே,

$$\alpha_2^r + p \alpha_2^{r-1} + \dots + p_n \alpha_2^{r-n} = 0$$

... ...

... ...

... ...

$\alpha_n^r + p_1 \alpha_n^{r-1} + \dots \dots + p_n \alpha_n^{r-n} = 0$ இவற்றைக் கூட்டினால்,

$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \dots + p_n S_{r-n} = 0$ எனப் பெறப் படும்.

எனவே (i)-லிருந்து $S_1, S_2, \dots \dots S_{n-1}$-ம், (ii)-லிருந்து, $S_n, S_n + 1, \dots$ -ம் காணலாம்.

6.. $f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ எனின்,

$S_r = - r$ மடங்கு $\left\{ y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \right\}$- ன் விரிப்பில், y^r -ன் கெழுவாகும்.

நிருபணம்:

$$f(x) \equiv x^n + p^1 x^{n-1} + \dots + p_n.$$

$$\equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{y} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{y} - \alpha_2\right)\dots\left(\frac{1}{y} - \alpha_n\right)$$

$$\therefore \quad y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = \left(1 - \alpha_1 y\right)\left(1 - \alpha_2 y\right)\dots\left(1 - \alpha_n y\right)$$

$$\text{மகை } y^n f\left(\frac{1}{y}\right) = \text{மகை } (1 - \alpha_1 y) + \text{மகை } (1 - \alpha_2 y) + \dots$$

$$\dots + \text{மகை } (1 - \alpha_n y)$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 y + \frac{\alpha_1^2 y^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_1^r y^r}{r} + \dots\dots\dots \\ + \alpha_2 y + \frac{\alpha_2 y + \alpha_2^2 y^2}{2} + \dots\dots + \frac{\alpha_2^2 y^r}{r} + \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ + \alpha_n y + \frac{\alpha_n^2 y^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^r y^r}{r} + \dots \end{array} \right\}$$

$$\therefore \quad \text{மகை } \left\{ y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \right\} = - \left\{ s_1 y + \dots \frac{S_2}{2} y^2 + \dots \dots \right.$$

$$\left. + \frac{S_r}{r} y^r + \dots \right\}$$

$$\therefore \quad \text{மகை } \left\{ y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \right\} \text{-ன் விரிவில் } y^r \text{-ன் கெழு} = - \frac{S^r}{r}.$$

$$\therefore \quad -r \text{ மகை } \left\{ y^n f\left(\frac{1}{y}\right) \right\} \text{-ன் விரிவில் } y^r \text{-ன் கெழு} = S_r.$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} \dots + p_n = 0$ -ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத் தொகை

$3p_1p_2 - p_1^3 - 3p_3$ என நிறுவுக.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ என்க.

$\therefore S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \ldots + \alpha_n^3$

$S_1 = -p_1$ ... (1)

$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0$

$\therefore S_2 = -2p_2 - p_1 S_1$

$= -2p_2 + p_1^2$ ... (2)

$S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 = 0$

$\therefore S_3 + p_1(p_1^2 - 2p_2) + p_2(-p_1) + 3p_3 = 0$

$S_3 + p_1^3 - 2pp_2 - p_1p_2 + 3p_3 = 0$

$\therefore S_3 = 3p_1p_2 - p_1^3 - 3p_3$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = 0$ -ன் தீர்வுகளின் ஐம்படிகளின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்க.

$\therefore S_5 = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5, + \delta^5$ காணவேண்டும்.

இங்கு $p_1 = -3$

$p_2 = 5$

$p_3 = -12$

$p_4 = 4$

$S_1 + p_1 = 0$

$\therefore S_1 = -p_1$

$= 3$ ... ... (1)

$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0$

$S_2 - 9 + 2 \cdot 5 = 0$

$\therefore \quad S_2 = -1 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$

$S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 = 0$

$S_3 + (-3)(-1) + (5)(3) + 3(-12) = 0$

$S_3 + 3 + 15 - 36 = 0$

$\therefore \quad S_3 = 18 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (3)$

$S_4 + p_1 S_3 + p_2 S_2 + p_3 S_1 + 4p_4 = 0$

$S_4 + (-3)(18) + (5)(-1) + (-12)(3) + 4.4 = 0$

$\therefore \quad S_4 = 79 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (4)$

$S_5 + p_1 S_4 + p_2 S_3 + p_3 S_2 + p_4 S_1 + 5p_5 = 0$

$S_5 + (-3)(79) + (5)(18) + (-12)(-1) + 4(3) = 0$

$\therefore \quad S_5 - 237 + 90 + 12 + 12 = 0$

$\therefore \quad S_5 = 123$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$x^3 + 3x + 9 = 0$-ன் தீர்வுகளின் 9ஆவது படிகளின் கூடுதல் பூச்சியம் என நிறுவுக.

$f(x) = x^3 + 3x + 9$ என்க.

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^3} + \frac{3}{y} + 9$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^3}\left\{1 + 3y^2 + 9y^3\right\}$$

$$\therefore \quad y^3 f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + 3y^2 + 9y^3$$

$$\therefore \text{ மடக்கை } y^3 f\left(\frac{1}{y}\right) = \text{மடக்கை } \left\{1+3y^2+9y^3\right\}$$

$$= 3y^2(1+3y) - \frac{[3y^2(1+3y)]^2}{2}$$

$$+ \frac{[3y^2(1+3y)]^3}{3} - \frac{[3y^2(1+3y)]^4}{4} \quad \cdots\cdots\cdots$$

$$y^9\text{-ன் கெழு} = \frac{3^3\, 3^3}{3} - \frac{3^4.\ 4.\ 3}{4}$$

$$= 3^5 - 3^5 = 0$$

∴ 9ஆவது படிகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4:

$x^3+3x+9=0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின், $S_9 = \alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9$, $S_{-4} = \alpha^{-4}+\beta^{-4}+\gamma^{-4}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு $p_0 = 1,$

$p_1 = 0$

$p_2 = 3$

$p_3 = 9$

$S_1+p_1 = 0, \quad \therefore \quad S_1 = 0$

$S_2 + p_1S_1 + 2p_2 = 0$

$\therefore \quad S_2 = -2p_2$

$= -6$

இங்கு $r < 3$.

$r \geq 3$-க்குக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை S^{r-3}ஆல் பெருக்கு.

$$x^r + 3x^{r-2} + 9x^{r-3} = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

(1)-ல், x-க்கு α, β, γ, என்ற தீர்வுகளின் மதிப்புகளை ஈடு செய்து, வரும் சமன்பாடுகளைப் பத்தி பத்தியாகக் கூட்ட,

$S_r + 3S_{r-2} + 9S_{r-3} = 0$ எனக் கிடைக்கின்றது.

இதில் $r = 3$ என வைக்க,

$S_3 + 3S_1 + 9S_0 = 0$ எனவாகிறது.

$r = 4$ என வைக்க,

$S_4 + 3S_2 + 9S_1 = 0$

$r = 5$ எனில், $S_5 + 3S_3 + 9S_2 = 0$

$r = 6$ எனில், $S_6 + 3S_4 + 9S_3 = 0$

$r = 7$,, , $S_7 + 3S_5 + 9S_4 = 0$

$r = 8$,, , $S_8 + 3S_6 + 9S_5 = 0$

$r = 9$,, , $S_9 + 3S_7 + 9S_6 = 0$

$r = 2$,, , $S_2 + 3S_0 + 9S_{-1} = 0$

$r = 1$,, , $S_1 + 3S_{-1} + 9S_{-2} = 0$

$r = 0$,, , $S_0 + 3S_{-2} + 9S_{-3} = 0$

$r = -1$,, , $S_{-1} + 3S_{-3} + 9S_{-4} = 0$

இத் தொடர்புகளில்,

$S_1 = 0$, $S_0 = 3$, $S_2 = -6$ எனப் பிரதியிட

$S_3, S_4, \ldots\ldots\ldots S_9, S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, S_{-4}$ இவற்றின் மதிப்பு கிடைக்கும்.

$$S_1 = 0$$
$$S_2 = -6$$
$$S_3 = -3\,(0) - 9\,(3) = -27$$
$$S_4 = -3\,(-6) - 9\,(0) = 18$$

$S_5 = -3(-27) - 9(-6)$

$= 81 + 54 = 135$

$S_6 = -3(18) - 9(-27)$

$= -54 + 243$

$= 189.$

$S_7 = -3(135) - 9(18)$

$= -405 - 162$

$= -567$

$S_9 = -3(-567) - 9(189)$

$= 1701 - 1701$

$= 0$

$$\therefore \quad S_{-1} = \frac{(1-6) - 3(3)}{9} = -1/3$$

$$S_{-2} = \frac{0 - 3(-1/3)}{9} = \frac{1}{9}$$

$$S_{-3} = \frac{-3 - 3(1/9)}{9} = \frac{1}{9}$$

$$S_{-4} = \frac{-(-1/3) - 3(-\frac{10}{27})}{9} = \frac{13}{81}$$

$$\therefore \quad S_9 = 0 \quad , \quad S_{-4} = \frac{13}{81}$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ என்பன $f(x) = 0$ - ன் தீர்வுகள், $\varphi(x)$, x -ன் விகிதமுறு முழு எண் சார்பாயின், $\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \ldots + \varphi(\alpha_n)$ - ன் மதிப்பைக் காண்க.

$f(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$

$$\therefore \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

$$\frac{f'(x)\,\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_1} + \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_n}$$

இருபக்கமும் வகுத்து, இருபக்கங்களின் மீதியை மட்டும் எடுத்துக்கொள்வோமாயின்,

$$\frac{R_0 x^{n-1} + R_1 x^{n-2} + \dots + R_{n-1}}{f(x)} = \frac{\varphi(\alpha_1)}{x-\alpha_1} + \frac{\varphi(\alpha_2)}{x-\alpha_2} + \dots$$
$$\dots + \frac{\varphi(\alpha_n)}{x-\alpha_n}$$

எனவே

$$R_0 x^{n-1} + R_1 x^{n-2} + \dots + R_{n-1} = \Sigma\, \varphi(\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x = \alpha_n)$$

இருபக்கங்களிலும் உள்ள x^{n-1} -ன் கெழுவை ஒப்பிட

$R_0 = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \dots + \varphi(\alpha_n)$ எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின்படி தீர்வுகளெனின்,

$S_{20} = \alpha^{20} + \beta^{20} + \gamma^{20} + \delta^{20}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = a$$

$$p^4 = b$$

$f(x) \equiv x^4 + ax + b$ என்க

$\therefore \quad S_{20} = \dfrac{x f'(x)}{f(x)}$ -ல் x^{-20} -ன் கெழுவாகும்.

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{x[4x^3 + a]}{x^4 + ax + b}$$

$$= \frac{\left(4 + \frac{a}{x^3}\right)}{1 + \frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^4}}$$

$$= \left(4 + \frac{a}{x^3}\right)\left[1 + \frac{1}{x^3}\left(a + \frac{b}{x}\right)\right]^{-1}$$

$$\therefore \quad S_{20} = \left(4 + \frac{a}{x^3}\right)\left[1 + \frac{1}{x^3}\left(a + \frac{b}{x}\right)\right]^{-1} \text{-ல்}$$

x^{-20} -ன் கெழுவாகும்.

$$= \left(4 + \frac{a}{x^3}\right)\left\{1 - \frac{1}{x^3}\left(a + \frac{b}{x}\right) + \frac{1}{x^6}\left(a + \frac{b}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^9}\left(a + \frac{b}{x}\right)^3 + \frac{1}{x^{12}}\left(a + \frac{b}{x}\right)^4 - \frac{1}{x^{15}}\left(a + \frac{b}{x}\right)^5 + \frac{1}{x^{18}}\left(a + \frac{b}{x}\right)^6 \right\} \ldots \text{ல்}$$

x^{-20} -ன் கெழுவாகும்.

$$= 4\left\{-\frac{1}{x^{15}}\left(a + \frac{b}{x}\right)^5 + \frac{1}{x^{18}}\left(a + \frac{b}{x}\right)^6\right\}$$

$$+ \frac{a}{x^3}\left\{-\frac{1}{x^{15}}\left(a + \frac{b}{x}\right)^5\right\}$$ -ல் x^{-2} –ன் கெழுவாகும்.

$$= 4\left\{-\frac{1}{x^{15}}\left(\frac{b^5}{x^5}\right) + \frac{1}{x^{18}}\, 6c_2\, \frac{a^4 b^2}{x^2}\right\}$$

$$+ \frac{a}{x^3}\left\{-\frac{1}{x^{15}}\left(5c_2\, \frac{a^3 b^2}{x^2}\right)\right\}$$ -ல்

x^{-20} ன் கெழுவாகும்.

$$= -4b^5 + 4\cdot 6c_2\cdot a^4 b^2 - 5c_2\, a^4 b^2$$

$$= -4\, b^6 + 4\,.\,\frac{6^3.5}{1.2}\; a^4\, b^2 - \frac{5.4^2}{1.2}\, a^4 b^2$$

$$= -4\, b^4 + 60\, a^4\, b^2 - 10\, a^4\, b^2$$

$$\therefore S_{10} = 50\, a^4\, b^2 - 4\, b^4$$

பயிற்சி

(1) $x^7 + 5\,x^4 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் 11ஆவது படிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக.

(2) $a + b + c = 0$ எனின்

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\;\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$ என நிறுவுக.

(3) $a + b + c + d = 0$ எனின்

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{5} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}\;\frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{3}$$

என நிறுவுக.

(4) α, β, γ என்பன $x^3 + 2\,x^2 - 3\,x - 1 = 0$-ன் தீர்வுகளாயின், $\frac{1}{\alpha^5} + \frac{1}{\beta^5} + \frac{1}{\gamma^5} = -518$ என நிறுவுக.

(5) $x^3 - p\,x^2 - r = 0$ -ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத்தொகை $p^3 + 3\,r$ என நிறுவுக.

(6) $x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6 = 0$ -ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத்தொகை 36 என நிறுவுக.

(7) $x^3 = x^2 + x + 1$ -ன் தீர்வுகளின் முப்படிகளின் கூட்டுத்தொகை 3 என நிறுவுக.

(8) $x^4 + px^3 + qx^2 + s = 0$-ன் தீர்வுகளின் நாற்படிகளின் கூட்டுத் தொகை $2p^2$ என நிறுவுக.

(9) $x^3 + qx + r = 0$-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின், $3\, S_2\, S_5 = 5\, S_3\, S_4$ என நிறுவுக.

(10) $x^7 - x^4 + 1 = 0$-ன் தீர்வுகளின் 6ஆவது படிகளின் கூட்டுத்தொகை 3 என நிறுவுக

(11) $2x^4 - x + 3 = 0$-ன் தீர்வுகளின் 12ஆவது படிகளின் கூட்டுத்தொகை $-\dfrac{213}{16}$ என நிறுவுக.

(12) $m \leq n$ ஆக இருப்பின், $x^n - 2x^{n-1} - 2x^{n-2} - \ldots\ldots\ldots - 2x - 2 = 0$-ன் தீர்வுகளின் m படிகளின் கூட்டுத் தொகை $3^m - 1$ என நிறுவுக.

(13) $m \leq n$ ஆக இருப்பின், $x^n - px^{n-1} - px^{n-2} - \ldots\ldots - px - p = 0$ ன் தீர்வுகளின் rஆவது படிகளின் கூட்டுத் தொகை $(p+1)^r - 1$ என நிறுவுக. $(r \leq n)$.

(14) $f(x) = 0$-ன் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ ஆகவும், $\varphi(x)$-ன் படி $(n-2)$ ஐ விட குறைவாகவும் இருக்குமானால்,

$$\sum_{1}^{n} \frac{\varphi(\alpha_r)}{f'(\alpha_r)} = 0$$ என நிறுவுக.

6. நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடுகள் அல்லது தலை கீழ்ச் சமன்பாடுகள்

(Reciprocal Equations)

$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots \ldots \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ எனின், $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n}$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + 1 = 0$$

ஆகும் என ஏற்கனவே கண்டறிந்தோம். இங்கு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு என்ன என்பதையும், அதன் தன்மைகளையும் காண் போம்.

1. நிகர்மாற்றுச்சமன்பாடுகள்: வரையறை:

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ என்க. $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots \ldots \frac{1}{\alpha_n}$ என்பனவும், சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானல், $f(x) = 0$ என்பது ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு என வழங்கப்படும்.

$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots \ldots + a_n = 0$ என்பதில் x-க்குப் பதிலாக, $\frac{1}{x}$ ஐப் பிரதியிட்டாலும், $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தன்மை மாருதிருப்பின், $f(x) = 0$ ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டின் தன்மைகள் (Properties of Reciprocal Equations)

2. தேற்றம்

$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_n = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடானுல் $a_n = \pm 1$ ஆகும்.

$f(x) = 0$ ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாதலால், $f(x) = 0$ என்பதின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \ldots$ எனின் $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots$ம் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

எனவே,

நாம் ஏற்கெனவே அறிந்ததின் வாயிலாக

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots \ldots + 1 = 0$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளும் முற்றொருமைகள் என்பது தெளிவு. அதாவது இவற்றின் தீர்வுகள் சமம். எனவே, இவ்விரு சமன்பாட்டின் கெழுக்களையும் ஒப்பிட்டால்,

$$\frac{1}{\alpha_n} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \ldots\ldots = \frac{a_r}{a_{n-r}} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{1} = K$$

எனப் பெறப்படும்.

இங்கு

$$K = \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{1}$$

$$\therefore \quad K^2 = \frac{a_n}{a_n} = 1$$

$$\therefore \quad K \pm 1$$

$$= \frac{1}{a_n} = \pm 1$$

$$\frac{a_1}{a_{n-1}} = \pm 1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

அதாவது

$$a_n = \pm 1$$
$$a_{n-1} = \pm a_1$$
$$a_{n-2} = \pm a_2$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

எனக் காண்கிறோம்

எனவே $a_n = \pm 1$ எனக் காண்கிறோம்.

இதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனின், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாயின், சமன்பாட்டின் முதல் உறுப்பிலிருந்தும், இறுதி உறுப்பிலிருந்தும் சம தூரத்தில் உள்ள கெழுக்கள் எண் மதிப்பளவில் சமம் என்பதும், அவற்றின் குறி ஒரே குறியீடாகவோ அல்லது மாறுபட்ட குறியீடாகவோ இருக்கும் என்பதாகும்

3. $a_n = \pm 1$ என்பதிலிருந்து நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடுகளை இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். $a_n = +1$ எனின், அந் நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடுகளை முதல் வகையைச் சேர்ந்தவை எனவும், $a_n = -1$ எனின், இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்தவை எனவும் பிரிக்கலாம்.

முதல் வகையைச் சேர்ந்த நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின்,

$a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$,

... ... $a_1 = a_{n-1}$, $a_n = 1$ எனக் காண்கிறோம்.

இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்த நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின்,

$a_n = -1$, $a_{n-1} = -a_1$,

$a_{n-2} = -a_2$, ... $a_1 = -a_{n-1}$ ஆகும்.

இங்கு நாம் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டியது, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இரட்டைப் படித்தான சமன்பாடாக இருப்பின் சமன்பாட்டின் தன்மை எப்படி இருக்கும் என்பதாகும்.

சமன் பாட்டின்படி $n = 2_m$ என்க. எனவே இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்த சமன்பாடு கொடுத்திருப்பின்,

$a_m = - a_m$ ஆகும்.

அதாவது $a_m = 0$. எனவே, இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்த இரட்டைப்படித்தான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாட்டில் நடு உறுப்பு இருக்காது (Middle term is absent) என அறிகின்றோம்.

ஓர் ஒற்றைப்படித்தான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு கொடுத்திருப்பின், அதன் தீர்வுகள், $\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\beta}$, ... என்ற வடிவத்திலும், $\delta = \frac{1}{\delta}$ என்ற வடிவத்திலும் இருக்கும். அதாவது இச் சமன்பாட்டில் தீர்வுகளில் ஒரு தீர்வு அதன் தலைகீழ் எண்ணுக்குச் சமம்.

$$\therefore \delta^2 = 1$$

$$\delta = \pm 1$$

அதாவது (+ 1) அல்லது (− 1) சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு என அறிகின்றோம். முதல் வகையைச் சேர்ந்ததாயின், அந் நிகர் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்று − 1 என்றும், இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்த சமன்பாடாயின், அதன் தீர்வுகளில் ஒன்று (+ 1) என்றும் காண்கின்றோம்.

எனவே, ஒற்றைப்படித்தான முதல் வகையைச் சார்ந்த நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாயின், அதன் காரணிகளில் ஒன்று $(x + 1)$ எனவும், இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்ததாயின், அதன் காரணிகளில் ஒன்று $(x - 1)$ எனவும் அறிகின்றோம்.

இனி இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்த இரட்டைப் படித்தான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டினை நோக்குவோம். இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினை

$$x^n - 1 + a_1 x (x^{n-2} - 1) + \dots \quad \dots = 0$$

என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம்.

இதில் (x^2-1) ஒரு காரணியாகும். இக்காரணியை விலக்கிப் பெறப்படுவது முதல்வகையைச் சேர்ந்த இரட்டைப் படித்தான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

(4) மேலே கண்டவற்றிலிருந்து நாம் கீழ்க்கண்டவற்றைக் காண்கின்றோம்.

(i) $f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ என்ற நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டில் $a_n = \pm 1$ என்பதைப் பொறுத்து, $f(x) = 0$ முதல் வகையை அல்லது இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்தது என்கின்றோம்.

(ii) $f(x) = 0$ ஓர் ஒற்றைப்படித்தான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாயின், $a_n = \pm 1$ என்பதைப் பொறுத்து, சமன்பாட்டின் காரணிகளில் ஒன்று $(x+1)$ அல்லது $(x-1)$ ஆக இருக்கும்.

(iii) $f(x) = 0$ ஓர் இரட்டைப்படித்தான இரண்டாம் வகையைச் சேர்ந்த நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாயின், அதன் காரணிகளில் ஒன்று (x^2-1) ஆகும்.

(iv) $f(x) = 0$ என்ற நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு ஒற்றைப் படித்தான முதலாம் அல்லது இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்ததாகவும், அல்லது இரட்டைப் படித்தான இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்தமாகவுமிருப்பின், $f(x) = 0$ –ன் காரணிகளில் முறையே $(x+1)$; $(x-1)$ அல்லது (x^2-1) என்பதை நீக்கி முதல் வகையைச் சேர்ந்த இரட்டைப் படித்தான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்.

(v) திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு (Standard Reciprocal Equation) கொடுக்கப்பட்ட நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு, இருபடித்தான முதல்வகையைச் சேர்ந்ததாக இருப்பின், அச் சமன்பாட்டை நாம் திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு என்கின்றோம்.

இனி கொடுக்கப்பட்ட நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டினை ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாக மாற்றுவது, நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது என்பதைப் பற்றி பார்ப்போம்.

(vi) ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டினை அதன் அளவில் (Dimension) பாதியாக்க முடியும்.

ஓர் இரட்டைப்படித்தான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டினை நாம் திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு எனக் கண்டோம். நாம் இப்பொழுது ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டை அதன் அளவில் எப்படிப் பாதியாக்குவது எனப் பார்ப்போம்.

$$a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots\ldots + a_m x^m + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \ldots (1)$$

என்ல சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இச் சமன்பாட்டை x^m ஆல் வகுத்துக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்:

$$a_0 \left(x^m + \frac{1}{x^m} \right) + a_1 \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} \right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + a_{m-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_m = 0 \qquad \ldots (2)$$

$x + \frac{1}{x} = Z$, $x^p + \frac{1}{x^p} = V_p$ எனக் குறிப்போம்.

ஆனல், $\left(x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} \right) = \left(x^p + \frac{1}{x^p} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)$

$$- \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} \right),$$

அதாவது $V_{p+1} = Z V_p - V_{p-1}$

P-க்கு 1, 2, 3,........என்று மதிப்பு கொடுக்க

$$V_2 = Z V_1 - V_0$$
$$= Z^2 - 2$$
$$V_3 = V_2 Z - V_1$$
$$= Z(Z^2 - 2) - Z$$
$$= Z^3 - 3Z$$

$$V_4 = V_3 Z - V_2$$
$$= Z(Z^3 - 3Z) - (Z^2 - 2)$$
$$= Z^4 - 4Z^2 + 2$$

$$V_5 = V_4 Z - V_3$$
$$= Z(Z^4 - 4Z^2 + 2) - (Z^3 - 3z)$$
$$= Z^5 - 5Z^3 + 5Z$$

... ...

... ...

என்று பெறப்படும்.

இம் மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிட, சமன்பாடு (1) ஆனது Z-ன் ஒரு m படிச்சமன் பாடாகும். இவ்வாறாகக் கொடுக்கப்பட்ட திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டை அதன் அளவில் பாதியாகக் குறைக்க முடியும்,

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$ ஐத் தீர்.

இச் சமன்பாடு முதல் உறுப்பு, கடைசி உறுப்பு இவற்றினின்று சமதூரத்தில் உள்ள உறுப்புகள் எதிரெதிர்க் குறியினையுடைய ஓர் ஒற்றைப் படைச் சமன்பாடாகும். ஆகவே $(+1)$ இச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும். எனவே $(x-1)$ ஒரு காரணியாகும்.

$$\therefore x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1$$
$$= (x-1)\,[x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1]$$
$$= 0.$$

$x^2 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ ஐ x^2 ஆல் வகுக்க,

$x^3 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ எனப் பெறப்படும்.

$\left(x + \frac{1}{x}\right) = Z$ என்க

$Z^2 - 2 - 4Z + 5 = 0$

$Z^2 - 4z + 3 = 0$

$\therefore Z = 3$ அல்லது $Z = 1$

எனவே $x + \frac{1}{3x} = 3$

அல்லது $x + \frac{1}{x} = 1.$

$\therefore x^2 + 1 - 3x = 0$

அல்லது $x^2 + 1 - x = 0,$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

அல்லது $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$$= \frac{x \pm \sqrt{-3}}{2}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1 \pm i\sqrt{-3}}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$ ஐத் தீர்.

இந்த இரட்டைப்படிச் சமன்பாட்டில் முதல், இறுதி உறுப்புகளினின்று சம தூரத்தில் உள்ள உறுப்புகள் எதிரெதிர் குறியுடனிருப்பதால், $(+1)$-ம், (-1)-ம் தீர்வாகும்.

எனவே, $(x^2 - 1)$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு காரணியாகும்.

$$\therefore x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x - 1$$

$$= (x^2 - 1)(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$$

$$= 0$$

$$\therefore x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

x^2 ஆல் வகுக்க,

$$x^2 + x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = Z$ என்க.

$$\therefore Z^2 - 2 + 2Z + 3 = 0$$

$$\therefore Z^2 + 2Z + 1 = 0$$

$$\therefore Z = -1, -1$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = -1$$

$$\therefore x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$1, -1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$ ஐத் தீர்.

இது ஓர் இரண்டாம் வகை இரட்டைப்படித்தான சமன்பாடு.

எனவே, இச் சமன்பாட்டிற்கு $(x^2 - 1)$ ஒரு காரணி.

$$\therefore x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 3x + 1)$$

$$= 0$$

$$\therefore x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$= -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

எனவே, சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$+1, -1, -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டைத் தீர் :

$$2x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஓர் ஒற்றைப்படித்தான நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

$$\therefore x = -1 \text{ ஒரு தீர்வு ஆகும்.}$$

$$\therefore 2x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 7x + 2$$

$$= (x + 1)(2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$$

$$\therefore 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$$

இது ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

இதனை x^2 ஆல் வகுக்க,

$$2x^2 + 5x + 4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

எனப் பெறப்படும்.

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = z$ என்க.

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

$$\therefore 2(z^2 - 2) + 5z + 4 = 0.$$

$$\therefore 2z^2 + 5z = 0.$$

$$\therefore z = 0,\ z = -\frac{5}{2}$$

$z = 0$ ஆனால்,

$$x + \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{-1}$$

$$= \pm i$$

$z = -\frac{5}{2}$ ஆனால்,

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore 2x^2 + 2 + 5x = 0.$$

$$\therefore (x + 2)(2x + 1) = 0.$$

$$\therefore x = -2.\ x = -\tfrac{1}{2}.$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்,

$-1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \pm i$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

$$2x^5 - 15x^4 + 37x^3 - 37x^2 + 15x - 2 = 0$$

இது ஓர் இரண்டாம் வகை ஒற்றைப்படித்தான சமன்பாடு.

$\therefore x = 1$ என்பது ஒரு தீர்வாகும்.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு $(x - 1)$ ஒரு காரணியாகும்.

$(x-1)$ என்ற காரணியை நீக்கினால்,

$2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0$ எனப் பெறப்படும்.

இதை x^2 ஆல் வகுக்க,

$$2x^2 - 13x + 24 - \frac{13}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\therefore 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = z$ என்க.

$$\therefore 2(z^2 - 2) - 13z + 24 = 0$$

$$\therefore 2z^2 - 13z + 20 = 0$$

$$\therefore z = 4, \quad z = \tfrac{5}{2}$$

$z = 4$ ஆனால்,

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

$$\therefore x^2 + 1 = 4x$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$Z = \frac{5}{2}$ ஆனல்,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x^2 + 1 = \frac{5x}{2}$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

$$\therefore \quad (x - 2)(2x - 1) = 0,$$

$$\therefore \quad x = 2$$

$$x = \tfrac{1}{2}.$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$1, 2, \tfrac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x^4 + 2ax^3 + 4bx^2 + 8ax + 16 = 0$ ஐ ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாக மாற்றியமைக்க.

பின்னர் அதையொட்டி

$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 24x + 16 = 0$ ஐத் தீர்க்கவும்.

ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாட்டில்,

$$p_{n-r} = p_r$$

$x^4 + 2ax^3 + 4bx^2 + 8ax + 16 = 0$-ல்

$x = 2y$ எனப் பிரதியிட

$$(2y)^4 + 2a\,(2y)^3 + 4b(2y)^2 + 8a(2y) + 16 = 0$$

$$\therefore\quad 16y^4 + 16ay^3 + 16by^2 + 16ay + 16 = 0$$

$$\therefore\quad y^4 + ay^3 + by^2 + ay + 1 = 0.$$

இது ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 24x + 16 = 0$-ல்,

$y = 2y$ எனப்பிரதியிட,

$$(2y)^4 - 6(2y)^3 + 16(2y)^2 - 24(2y) + 16 = 0$$

$$\therefore\quad 16y^4 - 48y^3 + 64y^2 - 48y + 16 = 0.$$

$\therefore\quad y^4 - 3y^3 + 4y^2 - 3y + 1 = 0$ என ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு பெறப்படும்.

இதனை y^2ஆல் வகுக்க,

$$y^2 - 3y + 4 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^2} = 0.$$

$$\therefore\quad \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 3\left(y + \frac{1}{y}\right) + 4 = 0$$

$Y + \frac{1}{y} = Z$ என்க.

$$\therefore\quad (Z^2 - 2) - 3Z + 4 = 0$$

$$\therefore\quad Z^2 - 3Z + 2 = 0$$

$$\therefore\quad Z = 2$$

$$Z = 1$$

$$\therefore\quad y + \frac{1}{y} = 1$$

$$y + \frac{1}{y} = 2$$

$y + \frac{1}{y} = 1$ ஆனல்,

$y^2 - y + 1 = 0.$

$\therefore \quad y = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$y + \frac{1}{y} = 2$ ஆனல்,

$(y - 1)^2 = 0$

$\therefore \quad y = 1, 1.$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$2, 2, 1 \pm i\sqrt{3}, \qquad (x = 2y).$$

பயிற்சி

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர் :

(1) $x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$

(2) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$

(3) $4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 20x + 4 = 0$

(4) $6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$

(5) $6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$

(6) $60x^4 - 736x^3 + 1433x^2 - 736x + 60 = 0$

(7) $2x^6 - 9x^5 + 10x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 9x + 2 = 0$

(8) $2x^6 - x^5 - 2x^3 - x + 2 = 0$

(9) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

(10) $2x^5 + x^4 + x + 2 = 12x^2(x + 1)$

(11) $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$

(12) $x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 1 = 0$

(13) $x^{10} - 3x^8 + 5x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

(14) $6x^6 - 25x^5 + 31x^4 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$

(15) $x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 1 = 0$

(16) $x^5 + 1 = 0.$

(17) $6x^6 - 17x^5 + 18x^4 - 18x^2 + 17x - 6 = 0$

(18) $12x^5 - 44x^4 + 33x^3 + 33x^2 - 44x + 12 = 0$

(19) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$-ன் தீர்வுகளுக்கு ஒன்று குறைவாகத் தீர்வுகளுள்ள சமன்பாடு காண்க. அது ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடு என நிறுவி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(20) $x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 6x - 15 = 0$ என்பதை ஒரு நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாக மாற்றித் தீர்க்க.

விடை

(1) $-1, \dfrac{(3+\sqrt{17}) \pm \sqrt{(3+\sqrt{17})^2 - 16}}{4},$

$\dfrac{-(3-\sqrt{17}) \pm \sqrt{(3-\sqrt{17})^2 - 16}}{4}$

(2) $2 \pm \sqrt{3}, \quad 3 \pm \sqrt{8}$ (3) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{3}, -3$ (5) $3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}$

(6) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{10}, 10$

(7) $2, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

(8) $-1, -1, i\pm, \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{7})$

(9) $-1, \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

(10) $-1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(11) $-1, 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$

(12) $1, 1, 1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(13) $\pm 1, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$

(14) $\pm 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}(5 \pm i\sqrt{11})$

(15) $1 \pm \sqrt{2}, \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

(16) $-, \frac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$

$$\frac{1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$$

(17) $\pm 1, \frac{2 \pm i\sqrt{5}}{3}, \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$

(18) $-1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

(19) $\frac{(3 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$,

$$\frac{(3 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

(20) $\frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{21}); \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

7. ஈருறுப்புச் சமன்பாடுகள் (Bniomial Equations)

இங்கு ஈருறுப்புச் சமன்பாடுகளைப்பற்றிய பொதுவான பண்பு களைப்பற்றி பார்ப்போம்.

(1) $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 'α' ஒரு கற்பனைத் தீர்வானால், α^m-ம் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும். m ஒரு முழு எண்ணாகும்.

$x^n - 1 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு 'α' எனின், $\alpha^n - 1 = 0$.

$$\therefore \alpha^n = 1.$$

$$\therefore (\alpha^n)^m = 1$$

$$\therefore (\alpha^m)^n = 1$$

அதாவது α^m, $x^n - 1 = 0$-ன் ஒரு தீர்வாகும்.

$x^n + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலும் இப்பண்பு பொருந்தும். ஆனல், m ஓர் ஒற்றைப்படை முழு எண்ணாயிருக்கவேண்டும்.

(2) m, n ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயின், $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ என்ற இரு சமன்பாட்டிற்குமுள்ள பொதுவான தீர்வு ஒன்றாகும்.

இதனை நிருவ, எண் கொள்கையில் காணும் கீழ்க்கண்டவற்றைப் பயன்படுத்துவோம்.

m, n ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயின், $mb - na = \pm 1$ என்பதிற்கிணங்க a, b ஐக் காணலாம்.

இங்கு ஒன்றைத்தவிர, முடிந்தால் β என்பது $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் பொதுவான தீர்வாகட்டும்.

$$\therefore \quad \beta^m = 1$$

$$\beta^n = 1$$

$$\beta^{mb} = 1$$

$$\beta^{na} = 1$$

$$\beta^{(mb-na)} = 1$$

அல்லது $\beta^{\pm 1} = 1.$

$$\therefore \quad \beta = 1.$$

எனவே, இங்கு $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் பொதுவான தீர்வு ஒன்றுகும்.

m, n என்ற முழு எண்களின் மிகப்பெரிய பொதுக்காரணி k எனின், $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகள் $x^k - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

இங்கு K ஆனது m, n-களின் மிகப் பெரிய பொதுக்காரணியாதலால்,

$$m = k\,m'$$

$n = k\,n'$ என இருக்கட்டும்.

இங்கு m', n' ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். எனவே, முன்பு கண்டதுபோல்

$$m'\,b - n'\,a = \pm 1$$

எண்பதிற்கிணங்க a, b ஐக் காணலாம்.

$$\therefore \quad mb - na = m'\,k\,b - n'\,k\,a$$

$$= k\,(m'\,b - n'\,a)$$

$$= \pm k.$$

எனவே, β ஆனது $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வாயின்,

$$\beta^{(mb-na)} = 1$$

அல்லது

$$\beta^k = 1$$

எனவே, β என்பது $x^k - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வாகும். எனவே, உண்மையென அறிகின்ரேம்.

n ஒரு பகா எண்ணும், β என்பது $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு கற்பனைத் தீர்வெனின்,

$$1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{n-1} \text{ என்பன}$$

$x^n - 1 = 0$-ன் தீர்வுகளாகும்.

இதன் படி $1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{n-1}$ என்பன $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்பது வெளிப்படை. இவை வேறு வேருனவை என நிறுவுவோம். முடிந்தால்

$$\beta^p = \beta^q \text{ என இருக்கட்டும்.}$$

$$\therefore \quad \beta^{(p-q)} = 1$$

இங்கு $(p - q) < n$. எனவே $(p - q)$, n ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். எனவே, ஏற்கெனவே கண்டபடி இது முரணுனதாகும். எனவே, தேற்றம் உண்மை.

(8) p, q, r - களால் ஆகிய கலப்பெண் n ஆயின், $x^p - 1 = 0$ $x^q - 1 = 0$, $x^r - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$x^p - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு β என்க.

$$\therefore \quad \beta^p = 1.$$

$$\therefore \quad (\beta^p)^{qr} \ldots = 1$$

$$\therefore \quad \beta^n = 1$$

எனவே, $x^n - 1 = 0$-ன் தீர்வு β ஆகும். இதுபோலவே நிறுவலாம்.

(9) ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களான p, q, r ஆல் ஆகிய கலப்பெண் n என்ருல், $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots \alpha^{p-1})\ (1 + \beta + \cdots + \beta^{q-1}).$$
$$(1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{r-1}).$$

என்ற பெருக்குத் தொகையினுடைய n உறுப்புகளாகும்.

α, β, γ முறையே $x^p - 1 = 0$, $x^q - 1 = 0$, $x^r - 1 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாகும்.

(10) p, q, r என்பன n-ன் பகா காரணிகளாகவும், $n = p^a\, q^b\, r^c$ எனவும் இருப்பின், $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha\, \beta\, \gamma$ வடிவத்தில் உள்ள பெருக்குத்தொகைகளாகும். இங்கு, α, β, γ முறையே $x^{p^a} = 1$, $x^{q^b} = 1$, $x^{r^c} = 1$-ன் தீர்வுகளாகும்.

மேலே கூறப்பட்ட இவ்விரண்டையும் நிரூபணம் இல்லாது ஏற்றுக்கொள்வோம்.

(11) இதுவரை கண்டவற்றிலிருந்து கீழ்கண்டவற்றைப் பெறுகின்றோம். அதாவது ஒன்றின் n-படித்தீர்வுகளைத் தீர்மானிப்பதில், n ஒரு பகா எண் அல்லது பகா எண்ணின் படிக்குச்சமமாக உள்ள ஒரு வகைக்குக் குறைக்கப்படுகின்றது.

(12) $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகள்
(Special Roots)

ஒவ்வொரு $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் வடிவத்தில் அல்லது குறைந்த படியுடைய சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாயல்லாமலிருந்தால், அத்தீர்வுகளை நாம் சிறப்புத் தீர்வுகள் அல்லது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு, ஒன்றின் nஆவது சிறப்புத்தீர்வு என்கின்றோம்.

$x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லாத் தீர்வுகளும் $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1}$ என்ற தொடரில் உள்ளன. இங்கு α கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஏதாவதொரு சிறப்புத் தீர்வாகும். இங்கு எந்தத் தீர்வும் மற்றொன்றிற்குச் சமமில்லை. முடியுமானால்

$$\alpha^p = \alpha^q \text{ என்க.}$$
$$\therefore\ \alpha^{p-q} = 1.$$

எனவே, α கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தீர்வு இல்லை என்பதாகும். எனவே $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1}$ ஒன்றுக்கொன்று சமமில்லை என்பதாகும்.

இதிலிருந்து, ஒன்றின் nஆவது சிறப்புத் தீர்வுகளில் ஒன்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், மற்ற தீர்வுகளை எளிதில் காணலாம்.

இனி சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^6 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகளைக் காண்க.

$6 = 1 \times 2 \times 3$, 1-ம், 2-ம், 3-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனவே $x^2 - 1 = 0$, $x^3 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், $x^6 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். எனவே $x^6 - 1$ஐ $x^3 - 1$ஆல் வகுக்க $x^3 + 1$ பெறப்படும். இதனை $x^2 - 1$ஆல், பின்பு $(x - 1)$ஆல் வகுக்க, $x^2 - x + 1$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே, $x^2 - x + 1 = 0$ என்பது $x^6 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகளைத் தீர்மானிக்கும்.

$x^2 - x + 1 = 0$ ஐத் தீர்க்க,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ எனப்பெறப்படும்.}$$

அதாவது $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\alpha_1 = \dfrac{1 - \sqrt{-3}}{2}$ என்க.

$$\alpha\alpha_1 = 1 = \alpha^6$$

$$\therefore \quad \alpha_1 = \alpha^5$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகள்

$$\alpha, \alpha^5, \text{ அல்லது } \alpha_1^5, \alpha_1$$

அல்லது $\alpha, \dfrac{1}{\alpha}$ ஆகும்.

13. ஈருறுப்புச் சமன்பாட்டைத் திரிகோண கணித வாயிலாகத் தீர்த்தல்

இங்கு தேமாவியரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

$x^n - 1 = 0$ என்ற ஈருறுப்புச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வதற்குப் பதிலாக, பொதுவான ஈருறுப்புச் சமன்பாடாகிய

$$x^n = a + b\sqrt{-1}$$

என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு a, b மெய்யெண்களாகும்.

$$a = R\cos\alpha$$

$$b = R\sin\alpha \quad \text{என்க}$$

$$\therefore \quad x^n = R(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha).$$

சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ என்க

$\therefore$ தேமாவியரின் தேற்றத்தின்படி

$$x^n = r^n(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^n$$

$$= r^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta)$$

$$\therefore \quad r^n(\cos n\theta + \sqrt{\sin}\, n\theta) = R(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin n\alpha)$$

$$\therefore \quad r^n\cos n\theta = R\cos\alpha$$

$$\therefore \quad r^n\sin n\theta = R\sin\alpha$$

இரண்டையும் இருபடிக்கு உயர்த்திக் கூட்டினால்

$$r^{2n} = R^2$$

$\therefore \quad r^n = R$ ஆகும்.

$$\cos n\theta = \cos\alpha$$

$$\sin n\theta = \sin\alpha$$

$$\therefore n\theta = \alpha + 2K\pi$$

இங்கு K ஒரு முழு எண்ணாகும்.

∴ பொதுவான சமன்பாட்டின் n–படித் தீர்வு

$$\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha+2K\pi}{n}+\sqrt{-1}\;\frac{\sin\alpha+2K\pi}{n}\right)$$

ஆகும். இதனை,

$$\left\{\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\alpha}{n}\right)\right\}\left(\cos\frac{2K\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\frac{\sin\alpha+2K\pi}{n}\right)$$

என எழுதலாம்.

இங்கு $R = 1$, $\alpha = 0$ எனக் கொள்வோமாயின்,

$x^n = a + b\sqrt{-1}$ என்பது

$x^n = 1 + 0\sqrt{-1}$

$= 1$ எனவாகும்.

∴ $x^n - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒன்றின் n–படித் தீர்வு

$$\cos\frac{2K\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2K\pi}{n} \text{ ஆகும்.}$$

∴ $x^{n-1} = 0$–ன் தீர்வுகள்

$$\left(\cos\frac{2K\pi}{n}+i\sin\frac{2K\pi}{n}\right),\; K = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1.$$

இதேபோல் $x^n + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$\left(\cos\frac{2K\pi}{n} - \frac{i\sin 2K\pi}{n}\right)$ என்பதிலிருந்து பெறப்படும் என அறியலாம்.

எனவே $x^n = a + i\,b$,

$x^n = a - i\,b$

என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

$$\sqrt[n]{R}\left\{\cos\frac{\alpha+2K\pi}{n}\pm i\sin\frac{\alpha+2K\pi}{n}\right\}$$

$K = 0, 1, 2, \ldots \ldots n-1$ என்பதிலிருந்து பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^4 + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்.

$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\therefore\ x^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\therefore\ x = \sqrt[4]{4}\ \cos\frac{\pi + 2K\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2K\pi}{4}\Big)$$

$K = 0, 1, 2, 3$ என்பதிலிருந்து நான்கு தீர்வுகளைப் பெறலாம். அவையான

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 1 + i$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -1+i$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -1 - i$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= 1 - i$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $1 \pm i$, $-1 \pm i$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

ஒன்றின் ஐம்படித் தீர்வு

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும் என நிறுவுக.

$x^4 + x^3 + x^2\ x + 1 = 0$ என்பது ஒரு திட்டமான நிகர்மாற்றுச் சமன்பாடாகும். எனவே, இதனை x^2 ஆல் வகுக்க,

$Z^2 + Z - 1 = 0$ எனப் பெறப்படும்.

இங்கு $Z = x + \frac{1}{x}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad Z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$ எனப் பெறப்படும்.

$$Z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$ என்பதிலிருந்து,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ 2x_2 - x(\sqrt{5} - 1) + 2 = 0$$

$$Z_2 = x + \frac{1}{x} = \frac{-1\sqrt{5}}{2}$$ என்பதிலிருந்து,

$$2x^2 + x(\sqrt{5} + 1) + 2 = 0$$ ஆகும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க, தீர்வுகள்

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

எனக் காண்கின்றோம்.

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ$$

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sin 72^\circ$$

$$\therefore\ \omega = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

இங்கு

$$\cos 72 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad \sin 72 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

என நாம் எளிதில் காணலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மற்ற தீர்வுகள் ω^4, ω^3, ω^2 ஆகும்.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைத் திரிகோண கணித மூலம் காண்க.

(1) $x^4 = 1 + i$

(2) $x^3 = 1 - i$

(3) $x^8 =$ [illegible]

(4) $x^6 = -4$

(5) $x^5 = i$ என்ற சமன்பாட்டை இயற்கணித வாயிலாகவும், திரிகோண கணித வாயிலாகவும் தீர்த்து,

$$\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

என நிரூபி.

(6) ஒன்றின் முப்படித் தீர்வு

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு என நிறுவுக.

(7) ஒன்றின் 20ஆவது படித்தீர்வு $\cos 15° + i \sin 15°$ ஆனது $x^8 - x^4 + 1 =$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு என நிறுவுக.

இங்கு $x^{24} - 1 = (x^{12} - 1)\ (x^4 + 1)\ (x^8 - x^4 + 1)$ என எழுதலாம் என்பதைக் கவனிக்க.

(8) $\epsilon_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{9}$, $\quad \epsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{9}$, $\quad \epsilon_3 = 2 \cos \frac{8\pi}{9}$

என்பன $y^3 - 3y + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுன் தீர்வுகள் என நிறுவுக.

(9) $\eta = \cos 24° + i \sin 24°$

$$\omega = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\epsilon = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

எனக் கொண்டு $\eta = \epsilon^2 \omega^{-1}$ என நிறுவுக.

$\cos 24°$, $\sin 24°$ ஐ இயற் கணித வாயிலாகக் கூறுக.

(10) $x^{12} - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகளைக் காண்க.

விடை

(1) $x = -\sqrt{2}\,[\cos(67^\circ 30^{\circ\prime} + 90^\circ K) + i \sin(11^\circ 15' + 90^\circ K)],$

$K = 0, 1, 2, 3.$

(2) $x = -\sqrt[3]{2}\,[\sin(120^\circ K) + i \sin(120) K],$

$K = 0, \pm 1.$

(3) $x = \cos(40^\circ + 120K) + i \sin(40^\circ + 120^\circ K),$

$K = 0, 1, 2$

(4) $x = \sqrt[3]{2}\,[\cos(30 + 60K) + i \sin(30 + 60K)],$

$K = 0, 1, 2, 3, 4, 5,.$

7. முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகள்

(The Cubic and the Biquadratic Equations)

முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகளை எப்படித் தீர்ப்பது என்பதைப் பற்றி நாம் அறியும் முன்பு, இவற்றின் தீர்வு காணும் முறைகளுக்கு அடிப்படையாக உள்ளவற்றைக் காண்போம். இதன் அடிப்படையில் ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணும் முறையை நோக்குவோம். பின்பு அதை முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாட்டிற்குப் பயன்படுத்துவோம்.

1. முதல் முறை

படிமூலமுடைய தீர்வைக் கொண்டுள்ள பொதுவான வடிவத்தின் அடிப்படையில் :

$\alpha \pm \sqrt{\beta}$-க்கு இரு மதிப்புகள் இருப்பதினால், இதனையே இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளது பொதுவான வடிவமாகக் கொள்வது வழக்கம். எனவே,

$$x = \alpha + \sqrt{\beta} \text{ என்க.}$$

$$\therefore x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta = 0$$

இதனை

$x^2 + Px + Q = 0$ என்ற சமன்பாட்டோடு ஒப்பிட்டால்,

$$2\alpha = -P,$$

$$\alpha^2 - \beta = Q$$

எனக் காண்கின்றோம்.

$$\therefore x = \alpha \pm \sqrt{\beta} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

எனப் பெறப்படும். இவைகளே இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு களாகும்.

முப்படிச் சமன்பாட்டில், ஓர் தீர்வை $\alpha^{\frac{1}{3}} + \frac{A}{\alpha^{\frac{1}{3}}}$ அல்லது $\alpha^{\frac{1}{3}} \; \beta^{\frac{1}{3}} \; (\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}})$ என்ற வடிவத்தில் குறிக்கின்றோம்.

ஓர் நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வை

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \frac{A}{\sqrt{\alpha} \; \sqrt{\beta}}$$ அல்லது

$$\sqrt{\beta}\,\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma}\,\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}$$

என்ற வடிவத்தில் குறிக்கின்றோம்.

2. இரண்டாவது முறை: காரணிகளாகப் பிரித்தல் முறை: (By resolving into factors).

இங்கு இருபடிச் சமன்பாட்டை

$$x^2 + Px + Q \equiv x^2 + Px + Q + \theta - \theta$$

என்ற வடிவத்தில் கொள்கின்றோம். இங்கு

$$\theta + Q = \frac{P^2}{4}$$

அல்லது $\theta = \frac{P^2 - 4Q}{4}$ எனக் கொள்கின்றோம்.

இதனால்,

$$x^2 P + x + Q \equiv \left(x + \frac{P}{2} \right)^2 - \left\{ \frac{\sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \right\}^2$$ ஆகும்.

$$= l^2 - m^2$$

$= (l - m)(l + m)$ என்ற வடிவத்தில் அமையும்.

இங்கு

$$l = x + \frac{P}{2}$$

$$m = \frac{\sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

இதே போல் ஒரு மூப்படிச் சமன்பாட்டை $(Px + Q)^3 - (p'x+q')^3$ அல்லது l^3-m^3 வடிவத்திற்குக் கொண்டுவரலாம். எனவே மூப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$l - m = 0$, $l - \omega m = 0$, $l - \omega^2 m = 0$ என்பதிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

ஒரு நாற்படிச் சமன்பாட்டை $(px^2 + qx + r)^2 - (p'x^2 + q'x + r')^2$ அல்லது

$(x^2 + lx + m)(x^2 + l^1x + m^1)$ என்ற வடிவத்தில் அமைக்கலாம். எனவே நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை

$(x^2 + lx + m)(x^2 + l'x + m')$ என்ற வடிவத்தில் அமைக்கலாம். எனவே, நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை

$px^2 + qx + r = \pm (p^1x^2 + q'x + r')$ என்பதிலிருந்து அல்லது

$$x^2 + lx + m = 0,$$

$$x^2 + l'x + m' = 0$$

என்பதிலிருந்து பெறலாம்.

(3) மூன்றும் முறை :

சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாலான சமச்சீர் சார்புகளினால்,

$x^2 + Px + Q = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் p, q எனக் கொள்வோமாயின்

$$p + q = -P$$

$$pq = Q$$

இவ்விரண்டிலிருந்து,

$lp + mq = f(P, Q)$ என்ற தொடர்பைப் பெறலாம்.

பின்பு இதிலிருந்தும், $p + q = -P$ என்பதிலிருந்தும் p, q வைப் பெறலாம்.

இருபடிச் சமன்பாட்டில் இத்தொடர்பைக் காண்பது எளிது.

இங்கு

$$(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$$
$$= P^2 - 4Q$$
$$p - q = \sqrt{P^2 - 4Q}$$

ஆகும்.

$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டில்,

$$l_p + m_q + nr = f(P, Q, R)$$

என்பதைப் பெறவேண்டும். இங்கு $p + q + r = -P$

$pq + pr + qr = Q$, $pqr = R$ ஆகும்.

இவற்றிலிருந்து p, q, r ஐக் காணலாம்.

$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$ என்ற நாற்படிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$k_p + l_q + mr + ns = f(P, Q, R, S)$ என்ற தொடர்பைக் காணவேண்டும்.

(4) முப்படிச் சமன்பாட்டைப் பற்றி நாம் ஏற்கெனவே கீழ்க் கண்டவற்றைப் பார்த்தோம்.

(1) $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ என்ற பொதுவான ஒரு முப்படிச் சமன்பாடு

$x^3 + 3Hx + G = 0$ என மாற்றியமைக்கப்படலாம்.

இங்கு

$$H = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0^2}$$

$$G = \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3}$$

(2) α, β, γ என்பன $a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின்,

$x^3 + 3Hx + G = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\frac{1}{3}(2\alpha - \beta - \gamma)$, $\frac{1}{3}(2\beta - \gamma - \alpha)$, $\frac{1}{3}(2\gamma - \alpha - \beta)$ ஆகும்.

(3) α, β, γ என்பன $x^3 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின், $(\alpha - \beta)^2$, $(\beta - \gamma)^2$, $(\alpha - \gamma)^2$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக்கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு

$$y^3 + 6qy^2 + 9q^2 y + 4q^3 + 27r^2 = 0$$

(4) $a_0^2(\alpha - \beta)^2$, $a_0^2(\beta - \gamma)^2$, $a_0^2(\alpha - \gamma)^2$ இவற்றைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு

$x^3 + 18Hx^2 + 81H^2 x + 27(G^2 + 4H^3) = 0$ ஆகும்.

$$a_0^6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2 = -27(HI - a_0 J)a_0^2$$

$HI - J = \Delta$ எனக் குறிக்கப்படுகின்றது. Δ முப்படிச் சார்பின் தன்மைகாட்டியாகும்.

(5) முப்படிச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளது தன்மைகள்:

(i) $G^2 + 4H^3$ ஒரு குறையெண்ணாயிருப்பின், α, β, γ மெய்யெண்களாகும்.

(ii) $G^2 + 4H^3$ ஒரு நேர் எண் எனின், சமன்பாட்டிற்கு இரு கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

(iii) $G^2 + 4H^3 = 0$ ஆயின், மூன்று தீர்வுகளில் இரண்டு சமமாயிருக்கும்.

(iv) $G = 0, H = 0$ எனின், சமன்பாட்டின் மூன்று தீர்வுகளும் சமம் என்றும்

$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$ என்றும் காண்கின்றோம்.

(5) கார்டன் முறைப்படி முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு களைக் காணுதல் (To solve a cubic equation by Cardan's method)

முப்படிச்சமன்பாட்டின் பொதுவான வடிவம்

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0$$

ஆகும்.

இதன் திட்டமான அமைப்பு

$x^3 + 3 Hx + G = 0$ எனப் பார்த்தோம்.

இங்கு கார்டன் முறைப்படி இச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

இச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு

$x = \alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}}$ என்க

$$\therefore \quad x^3 = \alpha + \beta + 3 \alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} (\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}})$$

$$= \alpha + \beta + 3 \alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} x$$

எனவே $\alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}}$ ஐத் தீர்வாகக்கொண்ட முப்படிச் சமன்பாடு

$$x^3 - 3 \alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} x - (\alpha + \beta) = 0$$

ஆகும்.

இதனை முப்படிச்சமன்பாடு

$x^3 + 3 Hx + G = 0$ வுடன் ஒப்பிட்டால்,

$$\alpha + \beta = - G$$

$$\alpha^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} = - H$$

எனக் காணலாம்.

$$\therefore \alpha \beta = - H^3$$

இனி $f(G, H)$ ஐக் காண்போம்.

$$(\alpha - \beta)^2 = \{ (\alpha + \beta)^2 - 4 \alpha \beta \}$$

$$= G^2 + 4 H^3$$

$$\therefore \quad \alpha - \beta = \sqrt{G^2 + 4H^3}$$

எனவே $f(G, H) = \sqrt{G^2 + H^3}$ ஆகும்.

$$\alpha + \beta = -G$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{G^2 + 4H^3}$$

என்பதிலிருந்து

$$\alpha = \frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2},$$

$$\beta = \frac{-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}$$

எனக் காண்கின்றோம்.

$$\beta = \frac{-H^3}{\alpha}$$

$G^2 + 4H^3 \nless 0$ அல்லது $G^2 + 4H^3 \geq 0$ எனின்,

$\alpha^{\frac{1}{3}}$ -ன் மூன்று மதிப்புகள் $\alpha^{\frac{1}{3}}$ $\omega \alpha^{\frac{1}{3}}$, $\omega^2 \alpha^{\frac{1}{3}}$

ஆகும்.

எனவே சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$\alpha^{\frac{1}{3}} - \frac{H}{\alpha^{\frac{1}{3}}},\ \omega \alpha^{\frac{1}{3}} - \frac{H}{\omega \alpha^{\frac{1}{3}}},\ \omega^2 \alpha^{\frac{1}{3}} - \frac{H}{\omega^2 \alpha^{\frac{1}{3}}}$$

ஆகும்.

(6) எண் சார்பு சமன்பாடுகளில் கார்டன் முறையின் பயன்

இங்கு $G^2 + 4H^3 < 0$ எனின், சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்ன என்பதைப் பார்ப்போம்.

$G^2 + 4H^3 = -K^2$ என்க.

$$\therefore \quad \alpha = \frac{-G + iK}{2},$$

$$\beta = \frac{-G - iK}{2}$$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{-G+iK}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-G-iK}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

இங்கு

$$2r\cos\theta = -G,$$

$$2r\sin\theta = K \text{ என்க.}$$

$$\therefore \tan\theta = -\frac{K}{G}$$

$$r = \frac{1}{2}(G^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (-H)^{\frac{3}{2}} \left[\because G^2 + 4H^3 = K^2\right]$$

$$\therefore w = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3} \text{ என்பதிலிருந்து}$$

$x^3 + 3Hx + G = 0$ என்ற முப்படிச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$2(-H)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{3},$$

$$-2(-H)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi\pm\theta}{3} \text{ ஆகும்.}$$

(7) ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டை இரு முப்படிச் சமன்பாடுகளின் வேறுபாடாகக் காணல்

$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = \phi(x)$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் $Z = ax + b$ எனப் பிரதியிட, $\phi(x)$ ஆனது

$$Z^3 + 3HZ + G$$

என மாற்றியமைக்கப்படும்.

இனி இச் சமன்பாட்டை இரு முப்படிச் சமன்பாடுகளின் வேறுபாடாகக் காண்பதற்கு,

$$Z^3 + 3HZ + G \equiv \frac{1}{\mu - \nu}\{\mu(z+\nu)^3 - \nu(z+\mu)^3\} \quad \ldots(1)$$

என்க. இங்கு நாம் μ, ν ஐக் காணவேண்டும்.

(1)-ன் வலப்புறம்

$$= Z^3 - 3\mu Z\nu - \mu\nu(\mu+\nu) \text{ ஆகும்.}$$

(1)-ன் இருபக்கமும் ஒத்த படிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$$\mu\nu = -H$$

$$\mu\nu(\mu+\nu) = -G \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \mu + \nu = \frac{G}{H},$$

$$\mu - \nu = \{(\mu+\nu)^2 - 4\mu\nu\}^{1/2}$$

$$= \left\{\left(\frac{+G}{H}\right)^2 + 4H\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{\frac{G^2 + 4H^3}{H^2}\right\}^{1/2}$$

$$= \frac{(G^2 + 4H^3)^{1/2}}{H}$$

$$= \frac{a\sqrt{\Delta}}{H} \quad [\because a^2\Delta = G^2 + 4H^3]$$

$$(Z+\mu)(Z+\nu) = Z^2 + (\mu+\nu)Z + \mu\nu$$

$$= Z^2 + \frac{G}{H}Z - H \quad \ldots \quad (2)$$

இனி $Z = ax + b$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$a^3\phi(x) \equiv \left(\frac{G + a\Delta^{\frac{1}{2}}}{a\Delta^{\frac{1}{2}}}\right)\left(ax + b + \frac{G - a\Delta^{\frac{1}{2}}}{2H}\right)^3$$

$$-\left(\frac{G - a\Delta^{\frac{1}{2}}}{a\Delta^{\frac{1}{2}}}\right)\left(ax + b + \frac{G + a\Delta^{\frac{1}{2}}}{2H}\right)^3$$ ஆகும்.

இதுவே நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

இப்பொழுது $\phi(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை μ, ν மூலமாகக் காண்போம்.

$$(\mu - \nu)\, a^2 \phi(x) \equiv \mu(Z + \nu)^3 - \nu(Z + \mu)^3$$

$$= 0$$

இங்கு $K \equiv ax + b$ என்பதிற்கிணங்க

$$\mu^{\frac{1}{3}}\nu^{\frac{1}{3}}\left(\mu^{\frac{1}{3}} + \nu^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$\mu^{\frac{1}{3}}\nu^{\frac{1}{3}}\left(\omega\mu^{\frac{1}{3}} + w^2\nu^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\mu^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}\left(\omega^2\mu^{\frac{1}{3}} + \omega\nu^{\frac{1}{3}}\right)$$

என்ற மதிப்புகளைக் காண்கின்றோம்.

(8) சமச்சீர் சார்புகளின் மூலம் முப்படிச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணுதல் :

நாம் ஏற்கெனவே,

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை

$$x^3 + 3Hx + G = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற வடிவத்தில் மாற்றியமைக்கலாம் எனக் கண்டோம்.

சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வுகள் α, β, γ எனின், இவற்றை $K = 1, \omega, \omega^2$ என்பதற்கிணங்க, $\frac{1}{3}\{(\alpha + \beta + \gamma) + K(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma) + K^2(\alpha + \omega^3\beta + \omega\nu)\}$ எனக் குறிக்க

லாம். ஏனென்றால், $1 + \omega + \omega^2 = 0$. ஆகையால், $K = 1$ எனும்பொழுது

$$\tfrac{1}{3}\{(\alpha + \beta + \gamma) + K(\alpha + w\beta + \omega^2\gamma) + K^2(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma)\}$$

$$= \tfrac{1}{3}\{3\alpha, + \beta(1 + \omega + \omega^2) + \gamma(1 + \omega + \omega^2)\}$$

$= \alpha$ ஆகும்.

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma \equiv L$$

$$\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \equiv M$$

எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad (KL)^3 = A + B\omega + C\omega^2$$

$(K^2 M)^3 = A + B\omega + C\omega^2$ ஆகும்.

இங்கு

$$A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma$$

$$B = 3(\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha)$$

$C = 3(\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2)$ ஆகும்.

$$L^3 + M^3 = 2\sum\alpha^3 - 3\sum\alpha^2\beta + 12\alpha\beta\gamma$$

$$= -27\frac{G}{a^3} \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$(KL)(K^2M) = K^3LM$$

$$= LM$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta$$

$$= -9\frac{H}{a^2}$$

$$\therefore \quad L^3M^3 = -729\frac{H^3}{a^6} \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1), (2) -லிருந்து, L^3, M^3 என்பது

$$y^2 + 27\frac{G}{a^3}\,y - 729\,\frac{H^3}{a^6} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக்காணலாம்.

எனவே, இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$\frac{27}{2a^3}\left(-G \pm \sqrt{G^2 + 4H^3}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இவற்றை t_1, t_2 எனக்குறிப்போமானல், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$\alpha = -\frac{b}{a} + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}\right)$$

$$\beta = -\frac{b}{a} + \frac{1}{3}\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right)$$

$$\gamma = -\frac{b}{a} + \frac{1}{3}\left(\omega^2\sqrt[3]{t_1} + \omega\sqrt[3]{t_2}\right)$$

எனக்காண்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$x^3 - 6x - 4 = 0$ஐத் தீர்

$x = \alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}}$ என்க

$$\therefore\ x^3 - 3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}x - (\alpha + \beta) = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$x^3 - 6x - 4 = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

(1), (2)ஐ ஒப்பிட,

$$\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \ldots \quad (3)$$

$$\alpha + \beta = 4 \qquad \ldots \quad (4)$$

எனப் பெறலாம்.

$$\alpha - \beta = [(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [16 - 32]^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots \qquad (5)$$

(4), (5)-லிருந்து

$$\therefore \quad \alpha = \frac{4 + \sqrt{16 - 32}}{2}$$

$$\therefore \alpha = 2+2i$$

$= 2(1+i)$ ஆகும்.

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.

$$\therefore \quad r = 2\sqrt{2}$$

$\tan\theta = 1, \quad \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ஆகும்

$$\therefore \quad \alpha^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2K\pi}{3}\right)\right]$$

$$K = 0, 1, 2.$$

$$= 8^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{2K\pi + \pi/4}{3} + i\sin\left(\frac{2K\pi + \pi/4}{3}\right)\right]$$

$$K = 0, 1, 2.$$

இதே போல்

$$\beta^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{2K\pi + \pi/4}{3} - i\sin\frac{2K\pi + \pi/4}{3}\right]$$

எனக் காணலாம்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$2(8^{\frac{1}{6}})\cos\frac{2K\pi + \pi/4}{3}, \qquad K = 0, 1, 2.$$

அல்லது

$$2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},\ 2\sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{12},$$

$$2\sqrt{2}\ \cos\ \frac{17\pi}{12}$$

அல்லது $\sqrt{-3}-1 \quad -2, -\sqrt{3}+1$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ என்பதை இரு முப்படிச் சார்புகளின் வேறுபாடாகக் கூறு.

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = P_1^3 - Q_1^3$ என்க.

இங்கு

$$P_1 - Q_1 = \lambda\,(x-\alpha)$$
$$\omega P_1 - \omega^2 Q_1 = \mu\,(x-\beta)$$
$$\omega^2 P_1 - \omega Q_1 = \nu\,(x-\gamma)$$

இவற்றைக் கூட்டினால்,

$$\lambda+\mu+\nu = 0,$$
$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma = 0$$

எனப் பெறுகின்றோம். இங்கு நாம் $1+\omega+\omega^2 = 0$ என்பதைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

எனவே,

$$\lambda = \rho\,(\beta-\gamma)$$
$$\mu = \rho\,(\gamma-\alpha)$$

$\nu = \rho\,(\alpha-\beta)$ என்பனவாகும்.

ஆனால் $\lambda\mu\nu = 1$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho^3} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$

λ, μ, ν-ன் மதிப்புகளைப் பயன்படுத்த,

$$P_1-Q_1 = \rho\,(\beta-\gamma)(x-\alpha)$$
$$\omega P_1-\omega^2 Q_1 = \rho\,(\gamma-\alpha)(x-\beta)$$
$$\omega^2 P_1-\omega Q_1 = \rho\,(\alpha-\beta)(x-\gamma)$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

இங்கு

$(x-\alpha)(\beta-\gamma) = P$

$(x-\beta)(\gamma-\alpha) = Q$

$(x-\gamma)(\alpha-\beta) = R$ என்க.

$\therefore \quad P_1 - Q_1 = \rho P$

$\omega \rho_1 - \omega^2 Q_1 = \rho Q$

$\omega^2 P_1 - \omega Q_1 = \rho R$ ஆகும்.

$\therefore \quad 3P_1 = \rho (P + \omega^2 Q + \omega R)$

$-3Q_1 = \rho (P + \omega Q + \omega^2 R)$

இதிலிருந்து P_1, Q_1 காணலாம்.

எனவே,

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = \frac{\rho^3}{3^3}(P + \omega^2 Q + \omega R)^3$$

$$+ \frac{\rho^3}{3^3}(P + \omega Q + \omega^2 R)^3$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$

$a'x'^3 + 3b'x'^2 + 3c'x' + d' = 0$

என்ற இரு முப்படிச் சமன்பாட்டில் உள்ள கெழுக்களிடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காண்க. இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் α, β, γ; α', β', γ' எனின், அவற்றின் தொடர்பு

$$\alpha(\beta'-\gamma') + \beta(\gamma'-\alpha') + \gamma(\alpha'-\beta') = 0$$

என்பதால் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது.

$$\alpha(\beta'-\gamma') + \beta(\gamma'-\alpha') + \gamma(\alpha'-\beta') = 0$$

என்பதை $(\omega-\omega^2)$ ஆல் பெருக்குவோமானல்,

$$L'M = LM'$$

அல்லது $L'^3M^3 = L^3M'^3$

எனக் காண்போம். இங்கு

$$L^3 = \frac{27}{2a^3}\left\{-G+\sqrt{G^2+4H^3}\right\}$$

$$M^3 = \frac{27}{2a^3}\left\{-G-\sqrt{G^2+4H^3}\right\}$$

$$L_1^3 = \frac{27}{2a'^3}\left\{-G'+\sqrt{G'^2+4H'^3}\right\}$$

$$M'^3 = \frac{27}{2a'^3}\left\{-G'-\sqrt{G'^2+4H'^3}\right\}$$

ஆகும். இவற்றை

$L'^3 M^3 = L_3 M'^3$ என்பதில் பிரதியிட,

$$\frac{27}{2a'^3}\left\{-G'+\sqrt{G'^2+4H'^3}\right. \frac{27}{2a^3}\left\{-G-\sqrt{G^2+4H^3}\right\}$$

$$= \frac{27}{2a^3}\left\{-G+\sqrt{G^2+4H^3}\right\}\frac{27}{2a'^3}\left\{-G'-\sqrt{G'^2+4H'^3}\right\}$$

$$\therefore\ G'\sqrt{G^2+4H^3} - G\sqrt{G'^2+4H'^3}$$

$$= G\sqrt{G'^2+4H'^3} - G'\sqrt{G^2+4H^3}$$

$$\therefore\ 2G\sqrt{G'^2+4H'^3} = 2G'\sqrt{G^2+4H^3}$$

$$\therefore\ G^2(G'^2+4H'^3) = G'^2(G^2+4H^3)$$

$$\therefore\ G^2H'^3 = G'^2H^3$$

இது வேண்டிய தொடர்பாகும்.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட முப்படிச் சமன்பாடுகளைத் தீர் :

(1) $x^3 - 6x - 6 = 0$

(2) $2x^3 + 6x + 3 = 0.$

(3) $3x^3 - 6x^2 - 2 = 0.$

(4) $x^3 + 18x - 6 = 0.$

(5) $x^3 + 3x^2 + 9x + 14 = 0.$

(6) $8x^3 + 12x^2 + 102x - 47 = 0.$

(7) $x^3 - 2x + 2 = 0.$

(8) $x^3 + 3x - 2 = 0.$

(9) $8x^3 + 12x^2 + 30x - 3 = 0.$

(10) $\sqrt[3]{\sqrt{243} + \sqrt{242}} - \sqrt[3]{\sqrt{243} - \sqrt{242}} =$

$2\sqrt{2}$ என நிறுவுக.

விடை

(1) $2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}$ (2) $\frac{4^{\frac{1}{3}}}{2} - 2^{\frac{1}{3}}$

(3) $\frac{2 + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{2}}{3}$ (4) $\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$

(5) -2 (6) $-\frac{1}{2} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$

(7) $-1{\cdot}769292$ (8) $0{\cdot}5960716$ (9) $0{\cdot}0960717.$

9. நாற்படிச் சமன்பாடு (Biquadratic Equation)

$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$

என்பது ஒரு நாற்படிச் சமன்பாட்டின் பொதுவான வடிவம் ஆகும்.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளெனின்,

$y^4 + 6Hy^2 + 4Gy + a_0^2 I - 3H^2 = 0$ என்ற மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$a_0 \alpha + a_1,\ a_0 \beta + a_1,\ a_0 \gamma + a_1,\ a_0 \delta + a_1$

என ஏற்கனவே கண்டறிந்தோம். மேலும்

$G^2 + 4H^3 \equiv a_0^2 (HI - a_0 J)$
என்ற தொடர்பையும் பார்த்தோம்.

இனி நாற்படிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் விதத்தைக் காண்போம்.

ஆய்லர் முறை (Euler's Method)

$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$ என்ற நாற்படிச் சமன்பாட்டை

$Z^4 + 6HZ^2 + 4G^2 + a^2 I - 3H^2 = 0$

என்ற வடிவத்தில் மாற்றியமைக்கலாம் எனக் கண்டோம்.

இங்கு $Z = ax + b$,

$H \equiv ac - b^2$

$I \equiv ae - 4bd + 3c^2$

$G \equiv a^2 d - 3abc + 2b^3$

இச் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு ஆய்லர்

$Z = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ என்பதை ஒரு தீர்வாகக் கொண்டார்.

இதனை இருபடிக்கு உயர்த்த,

$$Z^2 - \alpha - \beta - \gamma = 2 \sum \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta}$$

மறுபடியும் இருபடிக்கு உயர்த்த,

$$\left\{ Z^2 - (\alpha + \beta + \gamma) \right\}^2 = 4 \left(\sum \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} \right)^2$$

அதாவது

$$z^4 + (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2z^2(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= 4\left\{\begin{array}{l}\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma \\ \quad + 2(\alpha\sqrt{\beta\gamma} + \beta\sqrt{\alpha\gamma} + \gamma\sqrt{\alpha\beta}\end{array}\right\}$$

$$\therefore z^4 - 2z^2(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)^2$$

$$= 4(\alpha\beta + \gamma\beta + \alpha\gamma)$$

$$+ 8\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}\ \sqrt{\gamma}\,(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})$$

$$\therefore z^4 - 2z^2(\alpha + \beta + \gamma) - 8\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}\ \sqrt{\gamma}\,z$$

$$+ (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 4(\alpha\beta + \gamma\beta + \alpha\gamma) = 0.$$

இதனை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டோடு ஒப்பிட,

$$\alpha + \beta + \gamma = -3H$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3H^2 - \frac{a^2 I}{4}$$

$$\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}\ \sqrt{\gamma} = -\frac{G}{2}$$

எனக் காண்கின்றோம். இவற்றிலிருந்து, α, β, γ என்பன

$$t^3 + 3Ht^2 + \left(3H^2 - \frac{a^2 I}{4}\right)t - \frac{G^2}{4} = 0 \qquad \dots (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக் காண்கின்றோம்.

$$-G^2 \equiv 4H^3 - a^2 HI + a^3 J,$$

என்பதிலிருந்து சமன்பாடு (1) ஐ

$4(t + H)^3 - a^2 I(t + H) + a^3 J = 0$ என எழுதலாம்

இங்கு,

$$J \equiv ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 .$$

மறுபடியும், $t + H \equiv a^2 K$ எனப் பிரதியிட,

$$4a^3K^3 - IaK + J = 0 \qquad \dots (1)$$

எனற சமனபாடடைக காணகினறோம இதனை ஒடுககபபடட முபபடிச சமனபாடு எனகினறோம (Reducing cubic)

$$t \equiv a\ K - H$$

அதாவது $t \equiv b - ac + a\ K$ எனபதிலிருநது, K , K_2 K_3 எனபன ஒடுககபபடட முபபடிச சமனபாடடின தீரவுகளெனின,

$$\alpha = b\ - ac + a\ K_1$$

$$\beta = b\ - ac + a\ K_2$$

$$\gamma = b\ - ac + a\ K_3$$ ஆகும

இவறறை

$Z = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ எனபதில பிரதியிட

$$Z = \pm\sqrt{b\ - ac + a\ K_1} \pm \sqrt{b\ - ac + a\ K} \pm \sqrt{b\ - ac + a\ K}$$

எனக காணகினறோம

ஆனால $\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}\ \sqrt{\gamma} = -\frac{G}{2}$ எனபதிலிருநது

$$\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}\ \sqrt{\gamma} = \sqrt{\alpha}\ (-\sqrt{\beta})\ (-\sqrt{\gamma})$$

$$= (-\sqrt{\alpha})\ (\sqrt{\beta})\ (\ \sqrt{\gamma})$$

$$= (\ \sqrt{\alpha})\ (-\sqrt{\beta})\ (\sqrt{\gamma})$$

எனபவைகளே தீரவுகளெனக காணகினறோம

மேலும

$$Z = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$$

$\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}\ \sqrt{\gamma} = -\frac{G}{2}$ எனபதிலிருநது

$Z = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \frac{G}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$ என எழுதலாம

$\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$ வின் மதிப்புகளைக்கொண்டு

$$Z = ax + b$$

$$= \sqrt{b^2 - ac + K_1^2 a^2} + \sqrt{b^2 - ac + a^2 K_2} - \frac{G}{2\sqrt{6^2 - ac + a^2 K_1}\ \sqrt{b^2 - ac + a^2 K_2}}$$

என்பது சமன்பாட்டின் தீர்வு எனக்காண்கின்றோம். இங்கு K_1, K_2 என்பன

$4a^3 K^3 - IaK + J = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

ஆய்லரின் முறையில் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 எனக்கொள்வோமாயின்,

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 0$$

எனவே,

$$(Z_2 + Z_3)^2 = (Z_1 + Z_4)^2 = 4\alpha$$

$$(Z_3 + Z_1)^2 = (Z_2 + Z_4)^2 = 4\beta$$

$$(Z_1 + Z_2)^2 = (Z_3 + Z_4) = 4\gamma$$

எனக் காண்கின்றோம். இவற்றிலிருந்து Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ஐப் பெறலாம்.

இனி ஆய்லரின் முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்போம். இதோடு ஒடுக்கப்பட்ட முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளையும் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட நாற்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் x_1, x_2, x_3, x_4 எனக்கொள்வோம். எனவே,

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= ax_1 + b = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \\ Z_2 &= ax_2 + b = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} \\ Z_3 &= ax_3 + b = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \\ Z_4 &= ax_4 + b = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

ஆகும்.

இவற்றிலிருந்து ஆய்லர் முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளான α, β, γ என்பன

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{a^2}{16}\,(x_2 + x_3 - x_1 - x_4)^2 \\ \beta &= \frac{a^2}{16}\,(x_3 + x_1 - x_2 - x_4)^2 \\ \gamma &= \frac{a^2}{16}\,(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

எனக் காண்கின்றோம்.

(1), (2), (3)-லிருந்து

$$\left.\begin{aligned} 4(\beta - \gamma) &= 4a^2 (K_2 - K_3) \\ &= -a^2 (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) \\ 4(\gamma - \alpha) &= 4a^2 (K_3 - K_1) \\ &= -a^2 (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) \\ 4(\alpha - \beta) &= 4a^2 (K_3 - K_2) \\ &= -a^2 (x_1 - x_2)(x^3 - x_4) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

எனக் காணலாம்.

இறுதியாக இவற்றிலிருந்தும் (5),

$K_1 + K_2 + K_3 = 0$ என்பதிலிருந்தும்,

$$12\,K_1 = (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$$

$$12\,K_2 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) - (x_2 - x_3)(x_1 - x_4)$$

$$12\,K_3 = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) - (x_3 - x_1)(x_2 - x_4)$$

எனக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\sqrt{l + m + n} + \sqrt{l + m\omega + n\omega^2} + \sqrt{l + m\omega^2 + n\omega}$$

என்பது,

$Z^4 + 6HZ^2 + 4GZ + a^2 I - 3H^2 = 0$ என்பதின் ஒரு தீர்வாயின், H, I, J ஐ l, m, n வாயிலாகக் காண்க.

$$Z = \sqrt{l + m + n} + \sqrt{l + mw + nw^2} + \sqrt{l + mw^2 + nw}$$

$$= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$$

என்பது

$Z^4 + 6HZ^2 + 4GZ + a^2 I - 3H^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு எனக்கொண்டால்,

α, β, γ என்பன

$$t^3 + 3Ht^2 + (3H^2 - \frac{a^2 I}{4}) t - \frac{G^2}{4} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனக்கண்டோம்.

எனவே,

$$\alpha + \beta + \gamma = -3H \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3H^2 - \frac{a^2 I}{4} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\alpha \beta \gamma = -\frac{G^2}{4} \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1)—லிருந்து,

$$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma = l + m + n + l + mw + nw^2 + l + mw^2 + nw$$

$$= 3l + m(1 + w + w^2) + n(1 + w + w^2)$$

$$= 3l \qquad [\because 1 + w + w^2 = 0]$$

$$3l = -3H$$

$$l = -H$$

இதேபோல (2) (3) லிருநதும,

$$-G = 4H - a^2 HI + a^3 J$$

எனபதிலிருநதும

$$a\ I = 12\ mn$$

$$a^3J = -4(m + n)$$

எனப பெறலாம

10 பெராரி முறை (Ferrarı s Method)

இனி கொடுககபபடட ஒரு நாறபடிச சமனபாடடைப பெராரி (காாடனின மாணவா) முறைபபடி எபபடித்தீாபபது எனபதுபறறி பாாபபோம

$$x + ax + bx + cx + d = 0$$

கொடுகக படட சமனபாடு எனக

இதனை

$x + ax = -bx - cx - d$ என எழுதலாம

இருபககமும $\frac{a^2}{4}x$ ஐக கூடட

$$\left(x + \frac{a}{2}x\right) = \left(\frac{a}{4} - b\right)x - cx - d \qquad (1)$$

எனப பெறபபடும இச சமனபாடும கொடுககபபடட சமனபாடும ஒனறே சமனபாடு (1 ன வலபபுறம ஒரு பூரணமான இருபடிச சமனபாடாயின (Perfect Square) தீாவுகாணபது மிகவும எளிது ஆனால பெருமபாலும அவவாறிருபபதிலலை எனவே இதனைத தவிாகக பெராரி முறையில, நாம

$$y\ \left(x + \frac{a}{2}x\right) + \frac{y}{4}$$

எனபதை (1) ன இருபுறமும கூடடுகினறோம எனவே மாறறியமைககபபடட சமனபாடு

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \frac{1}{2}ay\right)x$$
$$+ \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right) \quad \dots \dots (2)$$

இனி y ஐத் தீர்மானிப்போம்.

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \frac{1}{2}ay\right)x$$
$$+ \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right) \quad \dots \dots (3)$$

என்பது $(ex + f)$–ன் இருபடியாகும்.

பொதுவாக

$Px^2 + Qx + R = (ex f)^2$ எனின், ... (4)

$Q^2 - 4PR = 0$ ... ... (5)

அதாவது $P = e^2$, $Q = 2ef$, $R = f^2$ ... ... (6)

இப்போது $P = 0$, $R = 0$ எனின், $Q = 0$ ஆகும். எனவே $e = f = 0$ ஆகும்.

[(6)-லிருந்து] $P \neq 0$ எனக் கொள்வோம்.
அப்பொழுது,

$$e = \sqrt{P}, \quad f = \frac{Q}{2e}$$

எனவே (5)–லிருந்து,

$$R = f^2$$

எனவே (2)–ன் வப்லபுறம் $(ex + f)$ போன்ற ஒருபடிக் கோவையின் இருபடிக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டுமாயின்,

$$\left(\frac{1}{2}ay - C\right)^2 = 4\left(y + \frac{a^2}{4} - b\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right)$$

ஆக, அல்லது

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0 \quad \dots \dots (7)$$

ஆக இருத்தல் வேண்டும்

எனவே, (3) ஆனது $(ex+f)^2$–க்குச் சமமாயிருக்க வேண்டுமாயின், (3)-ல் y-ன் மதிப்பு முப்படிச் சமன்பாடு **(7)**–ன் தீர்வுகளில் ஏதாவது ஒன்றைப் பெற்றிருத்தல் போதுமானது.

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2=(ex+f)^2$$ ஆகின்றது.

அதாவது

$$x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}=ex+f$$

$$x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}=-ex-f$$

என இரண்டாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$x^4+4x-1=0$ ஐத் தீர்

இங்கு

$a=0,\ b=0,\ c=4,\ d=-1$ ஆகும்.

எனவே நிர்ணயிக்கும் முப்படிச் சார்பு (Cubic resolvent)

$y^3+4y-16=0$ ஆகும்.

இங்கு $y=2$ என்பது ஒரு தீர்வு

$y=2$ எனக் கொள்வோமாயின்,

பெராரி முறையில் கண்ட சார்பு (3)

$2x^2-4x+2=(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2$

ஆகும். எனவே

இங்கு $e=\sqrt{2},\ f=-\sqrt{2}$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை

$x^2+1=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$

$x^2+1=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}$

என்பவற்றிலிருந்து பெறலாம். சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$\frac{1 \pm i\sqrt{\sqrt{8}+1}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{\sqrt{8}-1}}{\sqrt{2}}$$

ஆகும்.

11. டேகார்டின்முறை (Descarte's Method)

கொடுக்கப்பட்ட நாற்படிச் சமன்பாடு $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$ என்க.

$$(ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e)$$

$$\equiv a(x^2 + 2lx + m)(x^2 + 2l'x + m')$$

எனக் கொள்வோம்.

இரு பக்கங்களிலும் உள்ள ஒத்த படிகளின் கெழுக்களை ஒப்பிட,

$$2al + 2al' = 4b$$

$$\therefore \quad l + l' = \frac{2b}{a} \qquad \dots \dots (1)$$

$$am' + am + 4ll'a = 6c$$

$$\therefore \quad m + m' + 4ll' = \frac{6c}{a} \qquad \dots \dots (2)$$

$$2alm' + 2al'm = 4d$$

$$\therefore \quad lm' + l'm = \frac{2d}{a} \qquad \dots \dots (3)$$

$$amm' = e$$

$$\therefore \quad mm' = \frac{e}{a} \qquad \dots \dots (4)$$

எனக் காண்கின்றோம்.

(2)–லிருந்து,

$$4ll' - \frac{4c}{a} = \left[\frac{2c}{a} - (m + m')\right]$$

$$\therefore \quad \frac{c}{a} ll' = \frac{1}{4}\left(m+m' - \frac{2c}{a}\right)$$

$$\frac{c}{a} - ll' = \frac{1}{4}\left(m+m' - \frac{2c}{a}\right) = t \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad m+m' = 4t + \frac{2c}{a} \qquad \cdots \cdots (5)$$

$$ll' = \frac{c}{a} - t \qquad \cdots \cdots (6)$$

எனவே,

$$(l + l')(m + m') = lm + l'm' + l'm + lm'$$

$$\therefore \quad \frac{2b}{a}\left(4t + \frac{2c}{a}\right) = lm + l'm' + \frac{2d}{a} \left[\begin{matrix}(1), \ (5) \\ (3)\text{-லிருந்து}\end{matrix}\right]$$

$$\therefore \quad lm + l'm' = \frac{4abc - 2a^2 d}{a^3} + \frac{8bt}{a} \quad \cdots (7)$$

$$(l^2 + l'^2)(m^2 + m'^2) \equiv (ml' - lm')^2 + (lm + l'm')^2$$

அதாவது,

$$[(l + l')^2 - 2ll'][(m + m')^2 - 2mm']$$

$$\equiv [(ml' + lm')^2 - 4ll'mm'] + (lm + l'm')^2$$

எனவே (7) - லிருந்து,

$$\left\{\frac{4b^2}{a^2} - 2\left(\frac{c}{a} - t\right)\right\}\left\{\left(4t + \frac{2c}{a}\right)^2 - \frac{2e}{a}\right\}$$

$$= \left\{\frac{4d^2}{a^2} - \frac{4e}{a}\left(\frac{c}{a} - t\right)\right\}$$

$$+ \left\{\frac{4abc - 2c^2 d}{a^3} + \frac{8dt}{a}\right\}^2$$

அதாவது,

$$4a^3 t^3 - Iat + J$$

எனப் பெறப்படும். இது இங்கு ஒடுக்கப்பட்ட முப்படிச் சமன்பாடாகும். t-ன் மதிப்புகள் t_1, t_2, t_3 என்க. இவ்வொவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒப்ப $m + m'$, $l l'$-ன் மதிப்புகளைக் காணலாம். பின்பு m, m', l, l' இவற்றினைக் காணலாம். இம் முறையினால் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நாற்படிச் சமன்பாட்டை இரு இருபடிச் சமன்பாடுகளின் பெருக்கலுக்குச் சமமாகக் காணலாம். பின்பு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$6x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 17x + 12 = 0$ ஐத் தீர்.

$$6x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 17x + 12$$
$$= 6(x^2 + 2lx + m)(x^2 + 2l'x + m') \text{ என்க.}$$

$$\therefore l + l' = -\frac{13}{3}$$

$$m + m' = 4 - 4ll'$$

$$lm' + l'm = -\frac{17}{12}$$

$$mm' = 2$$

எனவே, ஒடுக்கப்பட்ட முப்படிச் சமன்பாடு,

$$4t^3 - \frac{259}{4}t + \frac{795}{8} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$t = \frac{5}{2} \text{ ஒரு தீர்வாகும்.}$$

$$\text{எனவே } ll' = \frac{4 - \frac{5}{2}}{6} = \frac{1}{4}$$

$$m + m' = 3$$

$$l + l' = -\frac{13}{3}, mm' = 2$$

$$lm' + l'm = \frac{17}{6}, \text{ } l, m, l', m' \text{ ஐ எடுத்துக்கொள்ள,}$$

$$l = -\frac{1}{3}, l' = -\frac{3}{4}.$$

$$m = 1, m' = 2$$

எனக் காண்கின்றோம். எனவே சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், $x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$, $x^2 - \frac{3}{2}x + 2 = 0$ என்பதின் தீர்வுகளாகும். இவைகள்

$$\frac{1}{3}\left(1 \pm 2\sqrt{2}\, i\right), \frac{1}{4}\left(t^3 \pm \sqrt{23}\, i\right)$$

ஆகும்.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:

(1) $x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0$

(2) $x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$

(3) $2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$

(4) $2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6 = 0$

(5) $x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x + 12 = 0$

காரணிப்படுத்துக:

(6) $x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 60x + 63$

(7) $x^4 - 17x^2 - 20x - 6$

(8) $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 26x + 14$

(9) $x^4 + 12x + 3$

(10) $x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 84x - 63$

(11) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

$x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ ஒரு தீர்வு என நிறுவுக. மற்ற தீர்வுகளைக் காண்க.

(12) தீர்க்க: $[(x+2)^2 - x^2]^3 = 8x^4(x+2)^3$

[$y = x + 1$ என வைக்க]

(13) $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d + K(x-r)^3$ ஒரு பூரண முப்படிச் சார்பெனின்,

$(ac - b^2) r^2 + (ad - bc) r + (bd - c^2) = 0$ என

நிறுவுக.

(14) $a_0x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ என்பதின் இரு தீர்வுகள் α-க்குச் சமமாயின்,

$$-\alpha = \frac{H_2}{H_1} = \frac{H_1}{H}$$ என நிறுவுக.

$[a_0a_2 - a_1^2 \equiv H, a_0a_3 - a_1a_2 \equiv 2H_1, a_1a_3 - a_2^2 \equiv H_2]$

விடை

(1) $2, 1, \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5})$

(2) $-1, 3, \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17})$

(3) $-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{7})$

(4) $-3, -1, -\frac{1}{2}, 2$

(5) $-1 \pm i\sqrt{2}, \quad \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{15})$

(6) $(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 6x - 21)$

(7) $(x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4x - 3)$

(8) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 6x + 7)$

(9) $(x^2 - x\sqrt{6} + 3 + \sqrt{6})(x^2 + x\sqrt{6} + 3 - \sqrt{6})$

(10) $\{x^2 - 2x(2 + \sqrt{7}) + 3\sqrt{7}\}$
$\{x^2 - 2x(2 - \sqrt{7}) - 3\sqrt{7}\}$

(11) $2\cos\frac{4\pi}{15}, 2\cos\frac{8\pi}{15}, 2\cos\frac{16\pi}{15}$

(12) $1, \quad \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$

$$\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$$

8. சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப் பிரித்தல்

(Separation of Roots)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் பிரித்தல் என்றால், தீர்வுகள் அமையும் இடைவெளியைக் காணுதலாகும். இங்கு நாம் மெய்யெண் தீர்வுகளைப் பற்றி மட்டுமே கூறுகின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக, $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ என்ற இடைவெளியில் அமைவதாகக் காண்கின்றோம். இவற்றைப் பற்றியும், தீர்வுகளின் எல்லைகளைப் பற்றியும் நாம் இங்குக் காண்போம். முதலில் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் பற்றி நாம் ஏற்கெனவே கண்ட சில உண்மைகளையும், அடிப்படைத் தேவைகளையும் காண்போம்.

(1) கீழ்க்கண்டவற்றை நாம் ஏற்கெனவே பார்த்திருக்கின்றோம்.

(i) $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $x = a, x = b, (a < b)$ எனப் பிரதியிடும் பொழுது $f(a), f(b)$-ன் குறிகள் மாறுபட்டதாயின், சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் குறைந்தது ஒன்று அல்லது ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் காணப்படும்.

(ii) $f(a), f(b)$ ஒரே குறியுடையதாயின், a, b-க்கிடையில் ஏதும் தீர்வுகள் இருக்காது அல்லது இரட்டைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் காணப்படும்.

(iii) ஒவ்வோர் ஒற்றைப்படிச் சார்புக்கும் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு. அத் தீர்வின் குறி இறுதி உறுப்பின் குறிக்கு எதிரானதாக இருக்கும்.

(iv) இறுதி உறுப்பின் குறி எதிராக உள்ள ஒவ்வோர் இரட்டைப்படிச் சார்புக்கும் குறைந்தது ஒரு நேர் எண் தீர்வும் ஓர் எதிர் எண் தீர்வுமாக இரு தீர்வுகள் உண்டு.

மேலே கூறப்பட்ட உண்மைகளிலிருந்து, கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் எல்லைகளைக் காண்போம்.

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + \lambda(x-2)(x-4)(x-6) = 0$$

$f(x)$ இல் $x = -\alpha, 2, 4, 6, +\alpha$ ஐப் பிரதியிட

$$f(-\alpha) = +$$
$$f(2) = -$$
$$f(4) = +$$
$$f(6) = -$$
$$f(+\alpha) = +$$

எனக் காண்கின்றோம். எனவே, சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $(-\alpha, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$, $(6, +\alpha)$ இடைவெளியில் அமையும் எனக் காண்கின்றோம்.

(2) இனி கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் உள்ள மெய்யெண் தீர்வுகளுக்கும் உறுப்புகளுக்கிடையேயுள்ள குறிகளுக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காண்போம்.

டேகார்டின் குறி விதி (Descartes Rule of Signs)

(i) $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை அச்சமன்பாட்டில் உள்ள குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை மிஞ்சாது.

(ii) $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை $f(-x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை மிஞ்சாது.

$f(x) = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு எனக் $f(x)$ ன் உறுப்புகளின் குறிகள்

$$+ \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad -$$

எனக இங்கு (+) லிருநது (−) ககும (−) லிருநது (+) ககுமாக ஏழு குறிமாறறங்கள உள்ளன

$f(x)$ ஐ $(x - \alpha)$ ஆல பெருககுவதாகக கொளவோம $(x-\alpha]$ ன குறிகள + − ஆகும இவவாறு கூடடெண தீரவுக குச சமமான ஏறுறுபபுக கோவையால $f(x)$ ஐப பெருககும பொழுது கிடைககும கோவையில உள்ள குறி மாறறங்களை நோககுவோம

$$+ \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$
$$+ \quad -$$

$$- \quad - \quad + \quad ' \quad + \quad - \quad + \quad - \quad , \quad - \quad - \quad +$$
$$+ \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$+ \quad \mp \quad - \quad \pm \quad \pm \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad \mp \quad - \quad +$$

இவவாறு பெருககிக கிடைதத கோவையின உறுபபுகளின குறி மாறறங்களிலிருநது கீழககணடவறறை நாம அறிகினறோம

(1) சநதேகததிறகிடமான குறிகளை (+) ஆககக கொணடால, $f(x) \times (x - \alpha)$ ன பெருககற பலனில குறி மாறறங்கள

$$+ \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad - \quad +$$

ஆகும

(2) சநதேகததிறகிடமான குறிகளை (—) ஆககக கொணடால, $f(x) \times (x - \alpha)$ ன பெருககற பலனில குறிமாறறங்கள

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad +$$

ஆகும

மேலே கணட இரணடு விதங்களிலும், எடடு குறிமாறறங்கள உள்ளன எனபதைக காணகினறோம

அதாவது $f(x)$-ல உள்ள குறிமாறறங்களைவிட $f(x) \times (x-\alpha)$ ல குறைநதது ஒரு குறிமாறறம அதிகமாக இருககினறது

எனக் காண்கின்றோம். அதாவது α என்ற கூட்டுமெய்யெண் தீர்வுக்காகக் குறைந்தது ஒரு குறிமாற்றம் ஏற்படுகின்றது. இவ்வாறே β என்ற கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுக்கு, $f(x)(x-\alpha)(x-\beta)$-ன் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை, $f(x)(x-\alpha)$-ல் உள்ள குறிமாற்றங்களை விடக்குறைந்தது ஒன்று அதிகமாக இருக்கும். இவ்வாறே n கூட்டு எண் தீர்வுகளுக்குக் குறைந்தது n குறிமாற்றங்கள் கூடுதலாகும் எனக் காண்கின்றோம்.

$f(x)=0$-ன் தீர்வுகளின் குறியை மாற்ற, $f(-x)=0$-ன் தீர்வுகள் கிடைக்கப் பெறுகின்றன. எனவே $f(x)=0$-ன் குறையெண் தீர்வுகள், $f(-x)=0$-ன் கூட்டு எண் தீர்வுகளாகும். எனவே $f(1-x)=0$-ல் உள்ள கூட்டு மெய் எண் தீர்வுகள், $f(-x)=0$-ல் உள்ள குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமிருக்காது. அதாவது $f(x)=0$-ல் உள்ள குறையெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை $f(x)=0$-ல் உள்ள குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைவிட அதிகமிருக்காது எனப் புலனாகின்றது.

(3) டேகார்டின் குறிவிதியிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றை அறிகின்றோம்;

(i) சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் அனைத்தும் கூட்டு எண்களாயின், சமன்பாட்டிற்குக் கூட்டு எண் தீர்வு கிடையாது.

(ii) x-ன் இரட்டைப்படிக் கெழுக்களும், ஒற்றைப்படிக் கெழுக்களும் எதிரெதிர் குறிகளைப் பெற்றிருந்தால், அச்சமன்பாட்டிற்குக் குறையெண் தீர்வுகள் கிடையாது.

(iii) இரட்டை யெண்படிகள் மட்டுமே பெற்று, அனைத்து கெழுக்களும் ஒரே குறியினையும் பெற்றிருந்தால் அச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகள் கிடையாது.

(iv) ஒற்றை யெண்படிகள் மட்டுமே பெற்று, அனைத்துக் கெழுக்களும் ஒரே குறியினைப் பெற்றிருந்தாலும் $x=0$ ஐத் தவிர மெய் யெண் தீர்வுகள் கிடையாது.

4. ரோல் தேற்றம் (Rolle's Theorem)

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு a, b என்பன அடுத்தடுத்த இரண்டு மெய் யெண் தீர்வுகளெனின், $f'(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, a, b-க் கிடையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு.

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டில், 'a' ஒரு α மடங்குத் தீர்வாகவும், 'b' ஒரு β மடங்குத் தீர்வாகவும் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\varphi(x) \qquad \ldots \quad (1)$$

$$[\varphi(a) \neq 0,\ \varphi(b) \neq 0]$$

$f(a), f(b)$ வெவ்வேறு குறியுடையதாயிருந்தால், a-க்கும் b-க்கு மிடையில் டேகார்டின் தேற்றப்படி $f(x)$-க்கு வேறொரு தீர்வு உண்டு. ஆனால் a-யும், b-யும் $f(x)=0$-ன் அடுத்தடுத்த தீர்வுகளாதலால், $f(a)\ f(b)$ ஒத்த குறியினைப் பெற்றிருக்கும் என்பன தெளிவு.

(1)ஐ வகைப்படுத்த,

$$f'(x) = \alpha(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta}\varphi(x)$$

$$+\ \beta(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta-1}\varphi(x)$$

$$+\ (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\varphi'(x)$$

$$\therefore \quad f'(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} [\alpha(x-b)+\beta(x-a)]\,\varphi x \\ +\ (x-a)(x-b)\varphi'(x) \end{array} \right\}$$

$= (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\psi(x)$ என்க.

எனவே,

$\psi(a) = \alpha(a-b)\varphi(a)$

$\psi(b) = \beta(b-a)\varphi(b)$ ஆகும்.

$\varphi(a), \varphi(b)$ ஒத்த குறியுடையதால், $\psi(a), \psi(b)$ எதிரெதிர் குறியைப் பெறும். எனவே, $\psi(x) = 0$ க்கு, a, b - க்கிடையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு என்றாகின்றது. எனவே, $f'(x)$க்கு a, b - க்கிடையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு என புலனாகின்றது.

(5) ரோல் தேற்றத்திலிருந்து நாம் கீழ்க்கண்டவற்றை அறிகின்றோம்.

(i) $f(x) = 0$ -ன் எல்லா தீர்வுகளும் மெய்யெண் தீர்வுகளாயும், $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f^{iii}(x) = 0$ என்பதின் தீர்வுகளும் மெய்யெண் தீர்வுகளாயிருப்பின், ஏதாவதொரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் அதற்கு முந்திய சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் பிரிக்கின்றன.

(ii) $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் அடுத்தடுத்த இரு தீர்வுகளுக்கிடையில் $f(x) = 0$ -ன் தீர்வுகளில் ஒன்றிற்குமேல் இருக்காது.

(iii) $f'(x) = 0$ 'a' மெய்யெண் தீர்வுகளைக் கொண்டிருப்பின், $f(x) = 0$ $(a + 1)$ க்கு மேல் மெய்யெண் தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்க முடியாது.

(iv) $f'(x) = 0$ - ல் எத்தனை கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளனவோ, குறைந்தது அத்தனை கற்பனைத் தீர்வுகள் $f(x) = 0$ - ல் காணப்படும்.

(v) $f'(x) = 0$ -ன் $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ போன்ற எல்லா மெய்யெண் தீர்வுகளையும் பெற்றால், $f(\alpha_1), f(\alpha_2) \ldots$ இவற்றின் குறிகளைக் கொண்டு $f(x) = 0$ - ல் மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$x^5 + 7x^3 - 9x + 11 = 0$ க்கு இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளாவது உண்டு என நிறுவுக.

$f(x) = x^5 + 7x^3 - 9x + 11 = 0$ என்க.

சமன்பாட்டின் குறிகள்.

$$+ \quad + \quad - \quad +$$

இதில் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 2 ஆதலால், சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகளின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை இரண்டாகும்.

$f(-x) = -x^5 - 7x^3 + 9x + 11 = 0$ ஆகும்.

$f(-x)$ - ல் உள்ள குறிமாற்றங்கள்

$- \quad - \quad + \quad +$ ஆகும்.

இதில் குறிமாற்றத்தின் எண்ணிக்கை ஒன்று. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்குரிய குறையெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை ஒன்றாகும். சமன்பாட்டிற்கு ஐந்து தீர்வுகள் உள்ளதால், கற்பனைத் தீர்வுகள் குறைந்தது இரண்டு உண்டு என்பது தெளிவு.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 30 = 0$-ன் தீர்வுகளின் தன்மையை ஆராய்க.

$f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 30 = 0$ என்க.

இதனை வகைப்படுத்த

$$f'(x) = 12x^2 - 42x + 18 = 0$$

அதாவது, $6(2x - 1)(x - 3) = 0$

எனவே, $f'(x)$-ன் தீர்வுகள் 1/2, 3 ஆகும்.

x	$-\infty$	0	1/2	3	∞
$f(x)$	$-\infty$	30	$\frac{137}{4}$	3	∞

இதிலிருந்து $f(x) = 0$ க்கு $(-\infty, 0)$-வில் ஒரு தீர்வு உண்டு எனத் தெரிகின்றது. $f(x)$ வேறெங்கும் எதிரெதிர்க் குறியினைப் பெறுதலால், மற்ற தீர்வுகள் கற்பனைத் தீர்வுகளாகின்றன. எனவே, ஒரு குறையெண் தீர்வும், இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + c = 0$-ன் மூன்று தீர்வுகள் சமமாயின், $3a^2 = 4b$, $27a^4 + 16c = 0$ என நிறுவுக. நான்காவது தீர்வு $\frac{a}{2}$ எனக் காட்டு.

$$f(x) = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + c = 0$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 + 12ax^2 + 12bx = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 + 24ax + 12b = 0$$

α, கொடுக்கப்பட்ட மடங்குத் தீர்வாயின்,

$f'(x) = 0,\ f''(x) = 0$ க்கு α ஒரு தீர்வாகும்.

அதாவது,

$$f'(\alpha) = 4\alpha^3 + 12a\alpha^2 + 12b\alpha = 0$$

$$\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha = 0$$

$$\therefore \alpha(\alpha^2 + 3a\alpha + 3b) = 0$$

$$\therefore \alpha \neq 0,\ \alpha^2 + 3a\alpha + 3b = 0 \qquad \cdots (1)$$

$$f''(\alpha) = 12\alpha^2 + 24a\alpha + 12b = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 2a\alpha + b = 0 \qquad \cdots (2)$$

(1), (2) – லிருந்து

$$a\alpha + 2b = 0$$

$$\therefore \alpha = -\frac{2b}{a}$$

$\therefore$ (1) -ல் பிரதியிட,

$$\frac{4b^2}{a^2} + 3a\left(\frac{-2b}{a}\right) + 3b = 0$$

$$\therefore 4b^2 - 6a^2b + 3a^2b = 0$$

$$\therefore \underline{4b = 3a^2}$$

α, $f(x) = 0$ க்கு ஒரு தீர்வாதலால்,

$$\alpha^4 + 4a\alpha^3 + 6b\alpha^2 + c = 0.$$

$\alpha = \frac{2b}{a}$ ஐப் பிரதியிட,

$$\frac{16b^4}{a^4} - \frac{32b^3}{a^3} + \frac{24b^3}{a^2} + c = 0.$$

$4b = 3a^2$ - லிருந்து,

$$b = \frac{3a^2}{4}$$

எனவே,

$$\frac{16}{a^4}\left(\frac{3a^2}{4}\right)^4 - \frac{32}{a^3}\left(\frac{3a^2}{4}\right)^3 + \frac{24}{a^2}\left(\frac{3a^2}{4}\right)^2 + c = 0$$

$$\therefore \quad 27a^4\left[\frac{3}{16} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right] + c = 0$$

$$\therefore \underline{27a^4 + 16c = 0}$$

நான்காவது தீர்வு β எனக் கொள்வோமாயின்,

$$\alpha^3 \beta = c$$

$$\therefore \beta = \frac{-ca^3}{8b^3}\left[\because \alpha = \frac{-2b}{a}\right]$$

தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை

$$3\left(\frac{-2b}{a}\right) + \beta = -4a$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{6b}{a} - 4a$$

$$= 6\,\frac{3a^2}{4a} - 4a$$

$$= \underline{\frac{a}{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

a–ன் எந்த மதிப்பிற்கு $ax^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0$ மடங்குத் தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்? அத் தீர்வுகளைக் காண்க:

$$f(x) = ax^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

$$f^1(x) = 3ax^2 - 18x + 12$$

α ஒரு மடங்குத் தீர்வெனின்,

$$f(\alpha) = 0,$$

$$f'(\alpha) = 0$$

$$\therefore \quad a\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 5 = 0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$3a\,\alpha^2 - 18\alpha + 12 = 0$$

$$\therefore \quad a\alpha^2 - 9\alpha + 4 = 0 \qquad \cdots \qquad (2)$$

$(2) \times \alpha$

$$a\alpha^3 - 6\alpha^2 + 4\alpha = 0 \qquad \cdots \qquad (3)$$

$$(3) - (1) => 3\alpha^2 - 8\alpha + 5 = 0$$

$$\therefore \quad (\alpha - 1)(3\alpha - 5) = 0$$

$\therefore \quad \alpha = 1$ அல்லது $\frac{5}{3}$

$\alpha = 1$ அல்லது $\frac{5}{3}$ என $f(x)$-ல் பிரதியிட,

$a - 9 + 12 - 5 = 0$ அல்லது

$$a.\,\frac{125}{27} - 9.\frac{25}{9} + 12\frac{5}{3} - 5 = 0$$

$\therefore \quad a = 2$ அல்லது $a = \dfrac{54}{25}$

எனவே, $f(x)$ ஆனது,

$2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0$ அல்லது

$$\frac{54}{25}x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0.$$

இவற்றிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$1,\ 1,\ \tfrac{5}{2}$$

அல்லது $\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}$ எனக் காணலாம்.

6. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் அடுத்தடுத்தாற்போல் உள்ள கெழுக்களின் மதிப்பு பூச்சியமானால், அச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் தன்மையை ஆராய நாம் கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம். இத் தேறறம் தி குவா தேற்றம் (De Gua's Theorem) எனப்படும்.

தி குவா தேற்றம்:

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் அடுத்தடுத்த r கெழுக்கள் பூச்சியம் எனக்கொள்வோம். அப்பொழுது,

(i) 'r' ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணுயின், $f(x) = 0$க்கு குறைந்தது 'r' கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

(ii) 'r' ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணுயின், பூச்சியம் கெழுக்களுடைய உறுப்புகளுக்குப் பிந்திய, முந்திய உறுப்புகளின் குறிகள் ஒரே மாதிரியாக அல்லது எதிரெதிராக இருப்பதைப் பொறுத்து $f(x) = 0$-க்குக் குறைந்தது $(r+1)$ அல்லது $(r-1)$ கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

$$f(x) = p_o x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{s-1} x^{n-s+1} + p_{s+r} x^{n-s-r}$$
$$+ p_{s+r+1} x^{n-s-r-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

என்க. இங்கு அடுத்தடுத்த 'r' கெழுக்கள் $p_s\, p_{s+1}, \dots p_{s+r-1}$ பூச்சியமாகும்.

$$F(x) = p_o x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{s-1} x^{n-s+1} + q_s x^{n-s}$$
$$+ q_{s+1} x^{n-s-1} + \dots + q_{s+r-1} x^{n-s-r+1}$$
$$+ p_{s+r} x^{n-s-r} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

என்க.

இங்கு $9_s, 9_{s+1}, \dots q_{s+r-1}$ என்பவை பூச்சியமல்ல.

$f(x)$; $f(-x)$-ன் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை முறையே l, m என்க. $L, M, - l', m'$ என்பன முறையே $F(x)$, $p_{s-1} x^{n-s+1} + p_{s+r} x^{n-s-r}$-ன் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை என்க.

$$p_{s-1} x^{n-s+1} + q_s x^{n-s} + \dots + q_{s+r-1} x^{n-s-r+1} + p_{s+r} x^{n-s-r}$$
$$= x^{n-s-r} \varphi(x)$$

என்க.

இங்கு $\varphi(x)$ ஒரு $(r+1)$ படிக்கோவையாகும். இதன் கெழுக்கள் பூச்சியமல்ல. எனவே $\varphi(x)$, $\varphi(-x)$ இவற்றின் மொத்த குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(r+1)$ ஆகும்.

எனவே, $L + M = (l+m) - (l' + m') + (r+1)$

$F(x)$ ஒரு n படிக்கோவையாதலால். $L + m \leq n$. இங்கு $F(x)$-ன் ஒரு கெழுவும் பூச்சியமில்லை.

எனவே, $(r+1) - (l' + m') \leq n - (l+m)$

மேலும் $f(x) = 0$-ன் மெய்யெண் தீர்வுகள் $(l+m)$ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாதாகையால், $f(x) = 0$-க்குக் குறைந்தது $n-(l+m)$ கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன. அதாவது $f(x) = 0$-க்குக் குறைந்தது $(r+1) - (l' + m')$ கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

(i) 'r' ஓர் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கட்டும். அப்பொழுது,

$$p_{s-1}\, x^{n-s-1} + p_{s+r}\, x^{n-s-r} = x^{n-s-r}\,(p_{s-1}\, x^{r+1} + p_{s+r})$$

$(-x)^{r+1} = -x^{r+1}$ ஆகும்.

p_{s-1}, p_{s+r} ஒரே குறியைக் கொண்டிருப்பின்,

$$l' = 0,\ m' = 1$$

எனவே $l' + m' = 1$

$\therefore\ (r+1) - (l' + m') = r$

அதாவது $f(x) = 0$க்குக் குறைந்தது 'r' கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

(ii) 'r' ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணாயிருக்கட்டும். அப்பொழுது

$p_{s-1}(-x)^{r+1} + p_{s+r} = p_{s-1}\, x^{r+1} + p_{s+r}$, p_{s-1}, p_{s+r} ஒரே குறியைப் பெற்றிருப்பின், $l_{,} = 0$, $m' = 0$.

எனவே $l' + m' = 0$

$\therefore\ (r+1) - (l' + m') = r+1$

எனவே $f(x) = 0$-க்குக் குறைந்தது $(r+1)$ கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

p_{s-1}, p_{s+r} எதிரெதிர் குறியைப் பெற்றிருப்பின்,

$$l' = 1,\ m' = 1$$

$$\therefore\ l' + m' = 2$$

$$\therefore\ (r+1) - (l' + m') = r - 1$$

எனவே, $f(x) = 0$-க் குக்குறைந்தது $(r-1)$ கற்பனைத் தீர்வுகள் உள்ளன.

7. தீர்வுகளின் எல்லைகள் (Limits of the roots)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சமன்பாட்டிற்குள்ள தீர்வுகள் அமையும் இடைவெளியினைக் காணலாம். இவ்விடை வெளியின் எல்லைகளைச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளது எல்லைகள் என்கிறோம். அவைகள் மேல் எல்லை, கீழ் எல்லை (Superior limit and Inferior limit) என்பதாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் எல்லாக்கூட்டெண் தீர்வுகளைவிட மிகப் பெரிய எண்ணைக் கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லை என்று வழங்குகின்றோம் எல்லாக்கூட்டெண் தீர்வுகளை விடமிகச் சிறிய எண்ணைக் கூட்டெண் தீர்வுகளின் கீழ் எல்லை என்கிறோம். இதே போல் குறையெண்களுக்கும் மேல் எல்லை, கீழ் எல்லையைக் காணலாம். $f(x) = 0$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு என்க. $f(-x) = 0$-க்குரிய கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லை, கீழ் எல்லை முறையே l, m எனின் $f(x) = 0$-ன் குறையெண் தீர்வுகளின் கீழ், மேல் எல்லைகள முறையே $-l, -m$ ஆகும்.

8. தீர்வுகளின் கீழ், மேல் எல்லைகளைத் தீர்மானித்தல்

கொடுக்கப்பட்ட சான்பாட்டின் தீர்வுகளின் கீழ், மேல் எல்லைகளை நிர்ணயிப்பதற்குக் கீழ்க் கண்ட விதிகளைப் பயன் படுத்துவோம்.

(i) $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots \dots \dots + p_{n-1} + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் முதல் குறைத்தற் குறியுடைய உறுப்பு (Negative term) $-p_r x^{n-r}$, மிகப் பெரிய குறையெண் கெழு $-P_k$ எனின், $\sqrt[r]{p_k} + 1$, கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லையாகும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் காணும் குறையெண் கெழுக்களை, கூட்டெண் கெழுக்களாகக் கொண்டு, அவற்றிற்கு முன்னுள்ள கூட்டெண் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகையால் வகுத்து, பெறக்கூடிய மிகப் பெரிய ஈவோடு ஒன்றைக் கூட்டிக் கிடைக்கப் பெறுவதே அச் சமன்பாட்டில் உள்ள கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லையாகும்.

(iii) **நியூட்டன் முறை** (Newton Method):

$f(x)$, அதன் வகைப் படுத்தப்பட்ட சார்புகள் இவை யனைத்தையும் எந்த எண் > 0 ஆக ஆக்குகின்றதோ, அவ் அவ்வெண் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் கூட்டெண் தீர்வு மேல் எல்லையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டின் கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லையைக் காண்க.

$$x^4 - 5x^3 + 40x^2 - 8x + 23 = 0$$

முறை (1)-ன் படி $-p_r x^{n-r} = -5x^3$ ஆகும்.

$\therefore$ இங்கு $r = 1$ ஆகும்

$p_k = 8$ ஆகும்

எனவே மேல் எல்லை $= \sqrt[r]{p_k} + 1$

$= \sqrt[1]{8} + 1 = 9$ ஆகும்.

முறை (2)-ன் படி, $\frac{5}{1} + 1 = 6$ ஆகும்.

நியூட்டன் முறைப்படி பார்ப்போம்.

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 40x^2 - 8x + 23$$

$$f_1(x) = xx^3 - 15x^2 + 80x - 8$$

$$f_2(x) = 12x^2 - 30x + 80$$

$$f_3(x) = 24x - 30$$

$x = 2$ எனின், $f(x) > 0,$

$$f_1(x) > 0$$
$$f_2(x) > 0$$
$$f_3(x) > 0$$

எனக் காண்கின்றோம்.

எனவே, நியூட்டனின் முறைப்படி கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லை 2 ஆகும்.

மேலே கண்ட மூன்று முறைகளில் நியூட்டனின் முறை சிறிது கடினமாகத் தோன்றினாலும், மிக நெருங்கிய எல்லையை (closest limit) இம் முறையால் பெறுகின்றோம் என்பதைக் கவனிக்க.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$2x^5 + 7x_4 - 40x^3 - 23x^2 + 38x - 4 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் பிரிக்க.

$f(x) = 2x^5 + 7x^4 - 40x^3 - 23x^2 + 38x - 4$ என்க.

$$\therefore\ f_1(x) = 10x^4 + 28x^3 - 120x^2 - 46x + 38$$
$$f_2(x) = 40x^3 + 84x^2 - 240x - 46$$
$$f_3(x) = 120x^2 + 168x - 240$$
$$f_4(x) = 240x + 168$$
$$f_5(x) = 240$$

நியூட்டன் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்வுகளின் எல்லையைப் பின்வருமாறு காணலாம்:

	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
$x = 0$	+	+	—			
$x = 1$	+	+	+	—		
$x = 2$	+	+	+	+	—	
$x = 3$	+	+	+	+	+	—
$x = 4$	+	+	+	+	+	+

எனவே, கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லை 4 ஆகும். அதோடு சமன்பாட்டின் மிகப் பெரிய தீர்வு 3-க்கும் 4-க்கும் இடையில் அமைகின்றது.

குறையெண் தீர்வுகளின் கீழ் எல்லையைக் காண, நாம் $f(-y) = 0$-ன் கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லையைக் காண்போம்.

$$f(x) = 2x^5 + 7x^4 - 40x^3 - 23x^2 + 38x - 4$$

$$\therefore \quad f(-y) = 3(-y)^5 + 7(-y)^4 - 40(-y)^3 - 23(-y)^2 + 38(-y) - 4$$

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\varphi(y) = 2y^5 - 7y^4 - 40y^3 + 23y^2 + 38y + 4 = 0$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad \varphi_1(y) = 10y^4 - 28y^3 - 120y^2 + 46y + 38$$

$$\varphi_2(y) = 40y^3 - 84y^2 - 240y + 46$$

$$\varphi_3(y) = 120y^2 - 168y - 240$$

$$\varphi_4(y) = 240y - 168$$

$$\varphi_5(y) = 240.$$

நியூட்டன் முறையைப் பயன்படுத்த,

	$\varphi_5(y)$	$\varphi_4(y)$	$\varphi_3(y)$	$\varphi_2(y)$	$\varphi_1(y)$	$\varphi(y)$
$y = 1$	+	+	−			
$y = 2$	+	+	−			
$y = 3$	+	+	+	−		
$y = 4$	+	+	+	+	−	
$y = 5$	+	+	+	+	+	−
$y = 6$	+	+	+	+	+	−
$y = 7$	+	+	+	+	+	+

எனவே, $f(-y) = 0$-ன் கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லை 7 ஆகும். எனவே $f(x) = 0$-ன் குறை யெண் தீர்வு களின் கீழ் எல்லை -7 ஆகும்.

எனவே - 7 க்கும், 4-க்கு மிடையில் அமையும் தீர்வுகளின் பிரிவுகளைக் காண்போம்.

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	குறி மாற்றங் களின் எண்ணிக்கை
-7	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	5
-6	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
-5	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
-4	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
-3	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	4
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	4
-1	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
0	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	3
1	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1
2	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	1
3	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	1
4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

எனவே (3, 4). (-7, -6), (-2, -1) இவற்றிற்கிடையே ஒவ்வொரு தீர்வுகளும், (0, 1)-க்கிடையே இரண்டு தீர்வுகளும் அல்லது ஒரு தீர்வுகளும் அமையாமலும் இருக்கலாம்.

இன்னும் நெருக்கமான இடைவெளி வேண்டுமாயின், -7, -6 ...... என எடுத்துக்கொள்வதற்குப் பதிலாக -7, $-6{\cdot}5$, -5, $-$ என எடுத்துக் கொண்டு காணவேண்டும்.

8. ஸ்டர்ம் சார்புகள் (Sturm's Functions)

சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப் பிரிப்பதற்கு இன்னொரு முறை உண்டு. இம்முறை C. ஸ்டர்ம் (1803–1855) அவர்களால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. முதன்முதலில் இதனை அவரே 1829-ல் வெளியிட்டார். இம் முறையினால் மடங்குத் தீர்வு பெறாத சமன்பாடுகளில் உள்ள மெய் யெண் தீர்வுகளின் சரியான எண்ணிக்கையைப் பெற முடிகின்றது.

$P = 0$ என்பது மடங்குத் தீர்வுகள் இல்லாத சமன்பாடு என்க. அப்பொழுது கீழ்க்கண்டவற்றை (a, b) என்ற இடைவெளியில் பெற்றிருக்கும்.

$$P, \quad P_1, \quad P_2, \ldots\ldots P_m \qquad \ldots \quad (1)$$

என்ற கோவைகளின் தொடரைக் காணலாம்.

(1) x-ன் மதிப்பு a லிருந்து b-க்கு அதிகமாகும் பொழுதும், $P = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளில் ஒன்றின் வழியாகச் செல்லும்பொழுதும் P/p_1-ன் ஈவின் குறி (—)-லிருந்து (+)க்கு மாறுகின்றது.

(2) (a, b)-ல் x-ன் ஒரே மதிப்பிற்கு (1)-ல் உள்ள ஏதேனும் அடுத்தடுத்துள்ள உறுப்புகள் பூச்சியமாவதில்லை.

(3) (a, b)-ல் x-ன் ஒரு மதிப்புக்கு ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு P_i $(i = 1, 2, \ldots m-1)$ பூச்சியமானால், P_{i-1}, P_{i+1}-ன் குறிகள் ஓர் எதிரெதிராக இருக்கும்.

(4) கடைசி உறுப்பாகிய P_m பூச்சியமாவதில்லை. எனவே (a, b)-ல் x-ன் மதிப்பு அதிகமாகும் பொழுது P_m-ன் குறி மாறாதிருக்கும்.

மேற்கண்டவற்றைப் பூர்த்திசெய்யும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை நாம் (a, b)–க்குரிய ஸ்டர்ம் சார்புகள் என்கின்றோம்.

இனி ஸ்டர்ம் சார்புகளை அமைக்கும் விதத்தைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

$P = 0$-என்ற சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு P^1 இதனை. P_1 எனக் குறிப்போம். P/P_1-ன் ஈவு Q, மீதி g_1 என்க.

அப்பொழுது,

$$P = P_1 Q_1 + g_1$$

g_1-ன் குறிமாற்றிய சார்பை P_2 என்க.

$$P = P_1 Q_1 - P_2$$

மறுபடியும் P_1 ஐ P_2 ஆல் வகுக்க.

$$P_1 = Q_2 P_2 + g_2 \text{ என்க}$$

g_2-ன் குறிமாற்றிய சார்பை P_3 என்க.

$$\therefore P_1 = Q_2 P_2 - P_3 \text{ ஆகும்.}$$

இதேபோல் தொடர்ந்து செயல்படுத்த,

$$P = P_1 Q_1 - P_2$$

$$P_1 = P_2 Q_2 - P_3$$

$$P_3 = P_4 Q_4 - P_5$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$P_{r-1} = P_r Q_r - P_{r+1}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$P_{m-2} = P_{m-1} Q_{m-1} - P_m$$

ஆகும்.

இவ்வாறு பெறப்பெற்ற $P, P_1, P_2, \ldots P_m$ என்பன ஸ்டர்ம் சார்புகளாகும். இங்கு, P_1 ஆனது P – ன் வகைக்கெழு எனவும், மற்றெதுவும் முந்தியதின் வகைக்கெழு இல்லை என்பதையும் கவனிக்க.

எனவே, ஸ்டர்ம் சார்புகளைக் காண்பதென்பது, P P_1-க்குள்ள உ. பொ. ம ஐக் காணுதலும், P/P_1-ன் மீதியின் குறியை மாற்றிக்கொண்டு தொடர்வதுமாகும்: இம்முறை இறுதியாகக்

கிடைக்கும் மீது பூச்சியம் அல்லது மாறிலியாகும் வரை பின் பற்றப்படும். கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இம் முறையை நன்கறியலாம்,

எடுத்துக்காட்டு 1.

$P = x^3 - 7x + 7$—என்பதன் ஸ்டர்ம் சார்புகளைக்காண்க.

$$P = x^3 - 7x + 7$$

$$P_1 = P^1 = 3x^2 - 7$$

இனி $\frac{P}{P_1}$ காணவேண்டும். இங்குப் பின்னங்களை நீக்குவதற்காக, Pஐ 3 ஆல் பெருக்குவோம். இனி $\frac{P}{P_1}$ ஐக் காண்போம்

3	0	−21	21		3 0 −7
3	0	− 7			1
		−14	21		

இங்கு $g_1 = -14x + 21$

$= -2x + 3$ (7 ஆல் வகுத்து)

$P_2 = g_1$–ன் குறிமாற்றிய சார்பு

$= 2x - 3$ ஆகும்.

இனி $\frac{P_1}{P_2}$ ஐக் காண்போம். இங்கு P_1 ஐ 2 ஆல் பெருக்கவும்.

$$\therefore P_1 = 6x^2 - 14$$

6	0	−14		2 −3
6	−9			3 9
	9	−14		
	18	−28	(2 ஆல் பெருக்க)	
	18	−27		
		−1		

மீதியின் குறியை மாற்ற,

$$P_3 = 1 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $P=0$ -என்பதின் ஸ்டர்ம் சார்புகள்

$$P = x^3 - 7x + 7$$

$$P_1 = 3x^3 - 7$$

$$P_2 = 2x - 3$$

$$P_3 = 1$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.

$x^7 - 2x^8 - 3x^2 + 10x - 4 = 0$-ன் ஸ்டர்ம் சார்புகளைக் காண்க.

$$P = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 4$$

$$P_1 = P^1 = 47^3 - 6x^2 - 6x + 10 = 2x^2 - 3x^2 - 3x + 5$$

P ஐ P_1 ஆல் வகுக்க. Pஐ 4 ஆல் பெருக்கவும்.

4 − 8	−12	40	−16		4 −6 −6 + 10
4 − 6	− 6	+ 10			1 −1
	−2	− 6	30	−16	
	−4	−12	60	−32	(2 ஆல் பெருக்க)
	−6	+ 6×	6	−10	
		−18	54	−22	
		− 9	27	−11	(2 ஆல் வகுக்க)

$$\therefore P_2 = 9x^2 - 27x + 11$$

P_3 ஐ, $\dfrac{P_1}{P_2}$ -லிருந்து பெறலாம்.

	2	−3	−3	5	9 −27 +11
(9 ஆல் பெருக்க)	18	−27	−27	42	5 3
	18	−54	+22		
		+27	−49	45	
		27	81	33	
			32	12	
			8	3	(4 ஆல் வகுக்க)

$P = -8x - 3$

P ஐ $\frac{P}{P_3}$ லிருந்து பெறலாம்

	9	−27	11	
(8 ஆல் பெருக்க)	72	−216	88	−8 −3
	+72	± 27		−8 243
		−243	88	
		−1944	704	(8 ஆல் பெருக்க)
		−1944	729	
			1433	

$P_4 = -1433$

$P = 0$ -ன் ஸ்டர்ம் சார்புகள்

$P_1 = 2x^3 - 3x - 3x + 5$

$P_2 = 9x^2 - 27x + 11$

$P_3 = -8x - 3$

$P_4 = -1443$

[**குறிப்பு :** ஸ்டர்ம் சார்புகளைப் பெறுவதற்கு உ. பொ. ம.-வைக் காணும்பொழுது கூட்டவோ, குறைக்கவோ, அல்லது பெருக்கவோ, வகுக்கவோ எடுத்துக்கொள்ளும் காரணி கூட்டெண்ணாயிருத்தல் வேண்டும். இவ்வாறு எடுத்துக்கொள்வதினால் மீதியின் குறியை மாற்றும் பொழுது ஏதும் பாதிக்கப் படாது.]

9. ஸ்டர்ம் தேற்றம் (Sturm's Theorem)

$P(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டில், $P(a)\neq 0$, $P\,b\neq 0$; $b>a$ என்க. அப்பொழுது $P(x)=0$-ல் (a, b)-ல் அமையும் வேறு வேறு தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை, ஸ்டர்ம் சார்புகளின் $x=a$, $x=b$ எனப் பிரதியிட்டுப்பெறும் குறி மாற்ற எண்ணிக்கைகளின் வேறுபாடாகும். இங்கு மடங்குத் தீர்வுகளை ஒருமுறைதான் எண்ணுகின்றோம்.

விளக்கம் :

$P=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஸ்டர்ம் சார்புகள் P_1, P_2, P_3 P_4 என்க, அப்பொழுது.

	P	P_1	P_2	P_3	P_4	குறிமாற்ற எண்ணிக்கை
$x=a$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
$x=b$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2

என்றிருப்பின், a-க்கும், b-க்குமிடையே $P=0$-க்கு இரண்டுதீர்வுகள் உள்ளன என்பதாகும்.

நிரூபணம் :

(1) $P(x)=0$-க்கு மடங்குத் தீர்வுகள் இல்லை என்க.

இங்கு P-க்கும், P_1-க்குமிடையே பொதுக்காரணி கிடையாது. xஆனது, ξஐ நெருங்கிச்செல்லும்பொழுது ஸ்டர்ம் சார்புகளில் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியம் என்க. அப்பொழுது

(i) $x=\xi$க்கு $P(x)=0$ எனின், 8(1)-ன் படி, சார்புகளின் தொடரில் ஒரு குறிமாற்றம் இழக்கப்படுகின்றது.

(ii) $x=\xi$க்கு $P_m(x)=0$ எனின், 8-3-ன் படி, $P_{m-1}(\xi)=-P_{m+}(\xi)$ ஆகும்.

$P_{m-1}(x)$, $P_{m+1}(x)$, $x=\xi$-ல் தொடர்ச்சியான சார்புகளாதலால், $x=\xi$க்கு அருகில் இவற்றின் குறிமாருதிருக்கும்.

x	$P_{m-1}(x)$	$P_m(x)$	$P_{m+-1}(x)$	குறிமாற்றிகளின் எண்ணிக்கை
$\xi-h$	$+$	$\pm$	$-$	1
ξ	$\pm$	0	$\pm$	1
$\xi+h$	$-$	$\pm$	$+$	1

இதிலிருந்து குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை கூடவுமில்லை; குறையவுமில்லை எனக் காண்கின்ளேம்.

x ஆனது ξ வழியே செல்லும்பொழுது, $x=\xi$ ஆனது ஸ்டர்ம் சார்புகளில் ஒன்றைவிட அதிகமானவற்றைப் பூச்சியமாக்குமெனின், 8-2-ன் படி அவற்றில் எவையிரண்டும் அடுத்தடுத்துள்ள சார்புகளாயிருத்தல் முடியாது. எனவே, இவற்றில் ஒன்று $P(x)$ எனின், அப்பொழுது $P(x)$க்கும், $P_1(x)$-க்குமிடையில் ஒரு குறிமாற்றம் இழக்கப்படுகின்றது. இவற்றில் ஒன்று $P(x)$ இல்லையெனின், குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை கூடவுமில்லை; குறையவுமில்லை.

எனவே x-ன் மதிப்பு (a, b)-ல் அதிகரிக்கும் பொழுது, $P(x)=0$-ன் ஏதாவதொரு தீர்வின் மதிப்பைப்பெற்ருல் ஸ்டர்ம் சார்புகளின் தொடரில் ஒரு குறிமாற்றம் ஏற்படுகின்றது. அப்படி இல்லையெனின், எந் நிலையிலும் x ஆனது (a, b)-ன் இடையில் உள்ள மதிப்புகளைப் பெறும்பொழுது, குறி மாற்றங்கள் கூடுவதில்லை; குறைவதுமில்லை. எனவே a, b-க்கிடையேயுள்ள தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை, $x=a$, $x=b$-க்கிடையில் ஸ்டர்ம் சார்புகளில் ஏற்படும் குறி மாற்றங்களின் வேறுபாடுக்குச் சமம் எனக் காண்கின்ருேம்.

2. $P(x)=0$-க்கு மடங்குத் தீர்வுகள் உண்டு என்க.

இங்கு ஸ்டர்ம் சார்புகளில் இறுதி உறுப்பு ஒரு மாதிரியாய் இருக்காது. ஸ்டர்ம் சார்புகளின் தொடர் $P(x)_1$ $P_1(x)_1$ .... $P_m(x)$ என்க. அப்பொழுது $P(x)=0$-ன் ஒரு மடங்குத் தீர்வின் மதிப்பை x பெற்ருல், $P(x)$-க்கும் $P(x)$க்கு மிடையில் ஒரு குறி மாற்றம் இழக்கப்படுகின்றது. இப்பொழுது தொடரின் மற்ற உறுப்புகளிடையே குறிமாற்றங்கள் கூடுவதோ குறைவதோ கிடையாது எனக் காண்போம்.

$P(x)=(x-\alpha)^p\ (x-\beta)^q\ (x-r)^r \ldots\ldots$ என்க. p, q, r என்பன கூட்டு முழு எண்களாகும்.

$$\therefore\quad P_1(x) = P^1(x) = (x-\alpha)^{p-1}\ (x-\beta)^{q-1}\ (x-r)^{r-1}\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{c} P\,(x-\beta)\,(x-r)\ldots+q(x-\gamma)\,(x-\alpha) \\ +\ r\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\ldots\ldots+\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

ஆகும்.

$t=(x-\alpha)^{p-1}\ (x-\beta)^{q-1}\ (x-\gamma)^{r-1}$ என்க. எனவே t ஆனது $P(x)$-க்கும் $P^1(x)$-க்குமுள்ள மிகப்பெரிய பொதுக் காரணியாகும். ஆகவே ஸ்டர்ம் சார்புகள் அனைத்தும் t ஆல் வகுக்கப்படும்.

$$\frac{P(x)}{t} = Q(x) \text{ என்க.}$$

$$\therefore\quad Q(x) = (x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)$$

$$\frac{P_1(x)}{t} = Q_1(x)$$

$$\frac{P_2(x)}{t} = Q_2(x)$$

$$\ldots\quad \ldots\quad = \quad\ldots\quad \ldots$$

$$\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots$$

$$\frac{P_m(x)}{t} = Q_m(x) \text{ என்க.}$$

இங்கு $Q_m(x)$, x சார்பற்றதாகும். எனவே,

$$Q(x)=Q_1(x)\ Q_1(r) - Q_2(x)$$

$$Q_1(x)=Q_2(x)\ Q_2(x) - Q_3(x)$$

$$\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots$$

$$\ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots$$

எனப் பெறப்படும். [§ 8-லிருந்து]

எனவே $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ... $Q_m(x)$-களைப் பூச்சியமாக்கும் மதிப்பை x பெறும் பொழுது குறி மாற்றங்கள் கூடுவதோ அல்

லது குறைவதோ கிடையாது என (1)-லிருந்து அறியலாம். எனவே தேற்றம் நிருபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$P(x) \equiv x^3 - 7x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் நிலையைப் பிரித்துக் காட்டுக.

$P(x) = x^3 - 7x + 7$ — ன் ஸடர்ம் சார்புகள்.

$$P_1(x) = 3x^2 - 7$$

$$P_2(x) = 2x - 3$$

$$P_3(x) = 1$$

என ஏற்கெனவே பார்த்தோம். இனி தீர்வுகளின் தன்மையை பார்ப்போம்.

x	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

எனவே, சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மூன்றும் மெய்யெண்கள். அவற்றில் இரண்டு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வுகள், மற்றொன்று குறைமெய்யெண் தீர்வாகும்.

இனி, தீர்வுகளின் எல்லைகள் $-4, 2$ என ஏற்கெனவே பார்த்தோம். இனி அத் தீர்வுகள் அமையும் இடைவெளியைக் காண்போம்.

x	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
-4	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-3	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-2	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+1$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+2$	$+$	$+$	$-$	$+$	0

எனவே, குறையெண் தீர்வு (— 4, —3)-க் கிடையிலும், கூட்டெண் தீர்வுகள் (1, 2) -க்கு மிடையிலும் அமைகின்றன எனக் காண்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$f(x) \equiv x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் நிலையைப் பிரித்துக்காட்டு.

$f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + 3$

இனி ஸ்டர்ம் சார்புகள் f_1, f_2, f_3, f_4 ஐக் காண்போம்.

$f_1(x) = f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 4x + 7$

$f_2(x)$ ஐக்காண, $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ ஐக் காண்போம்.

	1	− 3	− 2	+ 7	+ 3	4 — 9 — 47
(4 ஆல் பெருக்க)	4	− 12	− 8	+ 28	+ 12	
	4	− 9	− 4	+ 7		1 —3

	− 3	− 4	21	12
(4 ஆல்	−12	− 16	84	48
பெருக்க)	−12	+ 27	12	−21
		+ 43	72	−69

$\therefore \quad f_2(x) = 43x^2 - 72x - 69.$

$f_3(x)$ ஐக்காண,

	4	−9	−4	7	43 −72 − 69
(43 ஆல் பெருக்க)	172	−387	−172	301	
	172	−288	−276		4 —99

	− 99	+ 104	301
(43 ஆல்	− 4257	+ 4472	+ 12943
பெருக்க)	− 4257	+ 7128	+ 6831
(32 ஆல்		− 2656	+ 6112
வகுக்க)		− 83	+ 191

$\therefore \quad f_3(x) = 83x - 191$

இனி f_4 ஐக் காண்போம்.

	43 — 72 — 69		83	— 191
(83 ஆல் பெருக்க	3569 — 5976 — 5727			
	3569 — 8213		43	2237

	2237 — 5727
(83 ஆல்	185671 — 475341
பெருக்க)	185671 — 427267
	— 48074

$\therefore \quad f_4(x) = \underline{48074}$

ஸ்டர்ம் சார்புகளில் ஏற்படும் குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் கீழ்க்கண்டவாறு காண்போம்.

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$-\infty$	+	—	+	—	+	4
— 2	+	—	+	—	+	4
— 1	—	—	+	—	+	3
0	+	+	—	—	+	2
2	+	—	—	—	+	2
3	+	+	+	+	+	0
∞	+	+	+	+	+	0

எனவே $f(x) = 0$ -ன் தீர்வுகளில் ஒன்று $(-2, -1)$ யிலும் ஒன்று $(-1, 0)$ யிலும் மற்ற இரண்டும் $(2, 3)$ யிலும் அமைகின்றன எனக் காண்கின்றோம்.

10. நாம் இதுவரை பார்த்த எடுத்துக்காட்டுக்களிலிருந்தும், ஸ்டர்ம் தேற்றத்திலிருந்தும் ஸ்டர்ம் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தும் முறையைக் கீழ்க்கண்டவாறு காண்கின்றோம்.

ஸ்டர்ம் சார்புகளைக் கணக்கிடும்பொழுது கீழ்க்கண்டவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

(1) இறுதியாகக் கிடைக்கப்பெறும் மீதி வெறும் எண்ணாயிருக்குமாயின், அச் சார்பின் மதிப்பை அறியவேண்டிய அவசியமில்லை. நமக்குவேண்டியது குறிமட்டும்தான். இதனைத் தீர்மானிக்க $f_{n-1} = 0$ ஆகவும், f_n, f_{n-2} -ன் குறிகள் எதிரெதிராக அமைவதற்கான x - ன் மதிப்பைக் கண்டால் போதும்.

(2) $f_{n-2}(x)=0$ -ன் தீர்வுகள் $f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$ஐக் கணக்கிடத் தேவையில்லை. ஏனென்றால், x -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f_{n-2}(x)$, $f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$ இவற்றில் குறிமாற்றம் ஏற்படுவதில்லை.

(3) மேலும் மேலே கூறியவற்றால் ஸ்டர்ம் சார்புகளில் ஏதேனும் ஒன்று பூரண இருபடிச்சார்பாக அமையுமாயின், மேற்கொண்டு ஸ்டர்ம் சார்புகளைக் கணக்கிடத் தேவையில்லை.

11. மெய்யெண் தீர்வுகளுக்கான நிபந்தனைகள்

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் படி n ஆகவும், அவற்றின் n தீர்வுகள் வேறு வேறு மதிப்புடைய மெய்யெண்களாகவுமிருப்பின், x - ன் மதிப்பு $-\infty$ லிருந்து $+\infty$ -க்கு மாறும்பொழுது, ஸ்டர்ம் சார்புகளாகிய $f(x)$, $f_1(x)$,........$f_n(x)$ களில் n குறிமாற்றங்கள் இழக்கப்படவேண்டும். எனவே, $f(x) = 0$ - ன் ஸ்டர்ம் சார்புகளின் எண்ணிக்கை சரியாக $(n+1)$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

ஒரு சமன்பாட்டின் இறுதி உறுப்பின் குறியை $(+)$ எனக் கொள்வதாயின், இங்கு நமக்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம்.

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வேறு மெய்யெண் தீர்வுகளாயிருக்க வேண்டிய போதுமான நிபந்தனை

களாவன: (*i*) ஸ்டர்ம் சார்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $(n+1)$ ஆக இருக்கவேண்டும் (*ii*) எல்லா ஸ்டர்ம் சார்புகளின் இறுதி உறுப்பு கூட்டெண்ணாயிருக்க வேண்டும்.

எனவே, ஸ்டர்ம் சார்புகளின் இறுதி உறுப்புகளின் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை l ஆயின், $x \to \alpha$. $x \to -\alpha$ ஆகும்பொழுது குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை முறையே l ம், $(n-l)$ - ம் ஆகும். (இங்கு n கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் படி ஆகும்) ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் உள்ள கற்பனைத் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை $(n-2l)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : 1

$ax^2+2bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வேறு வேறு யெண்களாயிருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

இங்கு

$$f(x) \equiv ax^2+2bx+d \text{ என்க.}$$

$$\therefore \; f_1(x) = 2ax+2b$$

$$= ax+b \qquad \text{(2 ஆல் வகுத்த பிறகு)}$$

$$f_2(x) = b_2 - ac$$

எல்லா ஸ்டர்ம் சார்புகளையும் பெறுகின்றோம். எனவே வேண்டிய நிபந்தனை $f_2(x)$, $(+)$ ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே, $b^2-ac>0$ நமக்கு வேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ -ன் தீர்வுகள் வேறு வேறு மெய் யெண்களாயிருப்பதற்கான நிபத்தனையைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை
$f(Z) = Z^3+3HZ+G=0$ என எழுதலாம்.

எனவே,

ஸ்டர்ம் சார்புகள்

$$f(Z) = Z^3+3Hz+G$$

$$f_1(Z) = Z^2+H$$

$$f_2(Z) = -2HZ - G$$

$$f_3(Z) = -(G^2 + 4H^3)$$

எனப் பெறலாம். இங்கு எல்லா ஸ்டர்ம் சார்புகளும் இருக்கின்றன. எனவே, நமக்கு வேண்டிய நிபந்தனைகள் H, குறையெண்ணாகவும், $G^2 + 4H^3$-ம் குறையெண்ணாகவும் இருத்தல் வேண்டும் என்பதாகும். $G^2 + 4H^3 < 0$ என்றால், $H < 0$ என்பது தெளிவு.

எனவே $G^2 + 4H^3 < 0$ என்ற நிபந்தனை போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டு 3:

$$a x^4 + 4 b x^3 + 6 c x^2 + 4 d x + e = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வேறுவேறு மெய்யெண்களாயிருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைக் காண்க.

இங்கு நாம் ஏற்கெனவே அறிந்தபடி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$f(\ ) = Z^4 + 6HZ^2 + 4GZ + a^2 I - 3H^2 = 0$ என எழுதலாம்.

$G^2 + 4H^3 = a^2(HI - J)$ என்பதைப் பயன்படுத்தி,

$$f_1(Z) = Z^3 + 3HZ + G$$

$$f_2(Z) = -3HZ^2 - 3GZ - (a^2 I - 3H^2)$$

$$f_3(Z) = -(2HI - 3aJ)Z - GI$$

$$f_4(Z) = I^3 - 27J^2 = \Delta$$

என, ஸ்டர்ம் சார்புகளை நாம் காணலாம். இங்கு எல்லா ஸ்டர்ம் சார்புகளும் இருக்கின்றன.

எனவே, நமக்குத் தேவையான நிபந்தனைகள் $H < 0$, $2HI - 3aJ < 0$, $I^3 - 27J^2 = \Delta > 0$ என்பதாகும்.

12. வின்சென்ட் தேற்றம் (Vincent Theorem)

இத் தேற்றத்தை வின்சென்ட் என்பவர் 1836-ல் வெளியிட்டார். இத் தேற்றத்தின் மூலம், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சமன்

பாட்டில் உள்ள குறையெண், கூட்டெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கைகளைச் சரியாகக் கணிக்கவும், அவற்றின் எல்லைகளை அறியவும் முடிகின்றது. ஆனால், இங்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு மடங்குத் தீர்வுகள் இருக்கக் கூடாது.

தேற்றம் : $a, b, c, \ldots$ என்ற கூட்டு முழு எண்களாலான ஒரு தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம். மடங்குத் தீர்வுகள் இல்லாத ஒரு சமன்பாட்டை

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{z}, \quad z = c + \frac{1}{t}$$ போன்ற பிரதியீடுகளைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்தி மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டினைப் பெறலாம். இவ்வாறான பிரதியீடுகளைச் செயல்படுத்தும் பொழுது, அவை $a, b, c, \ldots$ இவற்றினைச் சாராமல் இருக்கவேண்டும். இதன் பிறகு பெறப்படும் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் ஒரு மாற்றித்திற்குமேல் காணமுடியாது.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு மடங்குத் தீர்வுகளைப் பெற்றிருப்பின், அவ்வாறல்லாத சமன்பாடாக மாற்றியமைக்க முடியுமாதலால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு மடங்குத் தீர்வுகள் இல்லாததாயிருக்க வேண்டும் என்ற நியந்தனையைக் கொள்ள வேண்டும் என்பதில்லை.

ஒன்றுக்கு அதிகமாக மதிப்புள்ள தீர்வுகளுக்கு $x = 1 + y$ என்றும், ஒன்றுக்குக் குறைவாக உள்ள தீர்வுகளுக்கு $x = 1/(1+y)$ எனவும் பிரதியிடுகின்றோம் $(y > 0)$.

குறையெண் தர்வுகளுக்கு $f(-x) = 0$. என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டு முன்போல் தொடர்கின்றோம். இனி, இத் தேற்றத்தின் முறையைக் கீழ்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள மெய்யெண் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையையும், அவற்றின் எல்லைகளையும் காண்க.

ஒன்றைவிட அதிகமாக உள்ள தீர்வுகளுக்கு $x = 1 + y$ என்றும், ஒன்றைவிடக் குறைவாக உள்ள தீர்வுகளுக்கு

$x = \frac{1}{1+y}$ என்றும் பிரதியிடுவோமானல், மாற்றியமைக்கப் பட்ட சமன்பாடுகள் முறையே

$$y^3 + 3y^2 - 4y + 1 = 0 \qquad \dots \qquad (1)$$

$$7y^3 + 14y^2 + 7y + 1 = 0 \qquad \dots \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1)-லிருந்து ஒன்றைவிட அதிகமாக இரு மெய் யெண் தீர்வுகள் இருக்கலாரு என்றும், (2)-லிருந்து (0, 1) க் கிடையில் ஏதும் தீர்வு இருக்க இயலாது எனவும் அறிகின்ருேம். ஆகவே (1)-னிணை மறுபடியும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$y = 1 + z$$

$y = 1/1 + z$ எனப் பிரதியிட,

$$z^3 + 6z^2 + 5z + 1 = 0 \qquad \dots \qquad (3)$$

$$z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0 \qquad \dots \qquad (4)$$

என்ற மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு சுளைட் டெறுசின்ருேம்

(3)-ல் ஏதும் மாற்றமில்லே. எனவே கூட்டெண் தீர்வுகள் இல்லே. (4)-ல் இரண்டு மாற்றங்கள் உள்ளன. எனவே (4) ஐ மறுபடியும் ஆராய்வோம்.

இங்கு $z = 1 + t$,

$z = 1/1 + t$ எனப் பிரதியிட,

$$t^3 + 2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

என்ற மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளைப் பெறுகின்ருேம். இங்கு இரண்டிலும் ஒரு மாற்றம் மட்டும் உண்டு. எனவே, ஒவ்வொரு கூட்டெண் தீர்வு உண்டு. இச்சமன்பாடுகளைப் பெற, நாம்

$$x = 1 + y, \quad y = \frac{1}{1+z}, \quad z = 1 + t$$

அதாவது $x = 1 + \frac{1}{2+t}$ $\qquad \dots \qquad (5)$

$$x = 1+y,\quad y=\frac{1}{1+z}\quad z=\frac{1}{1+t}$$

$$\text{அதாவது } x = 1 + \frac{1+t}{2+t} \qquad \ldots \qquad (6)$$

என்ற பிரதியீடுகளை முறையே செய்திருக்கின்றோம். $t=0$, $t=\infty$ என்ற மதிப்புகளை எடுத்துக்கொண்டு, (5), (6)லிருந்து, தீர்வுகளின் எல்லைகள் (1, 3/2), (3/2, 2) எனக் காண்கிறோம்

இதேபோல் குறையெண் தீர்வு -4, -3-க்கு இடையில் அமைகின்றன எனக் காணலாம்.

பயிற்சி

(1) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளில் உள்ள கூட்டெண் தீர்வுகளின் மேல் எல்லையைக் காண்க.

(i) $x^3 - 2x^2 - 51x - 110 = 0$

(ii) $x^4 - 5x^3 + 40x^2 - 8x + 23 = 0$

(iii) $x^8 + 20x^7 + 4x^6 - 11x^5 - 120x^4 + 13x - 25 = 0$

(iv) $x^5 + 3x^4 + x^3 - 8x^2 - 51x + 18 = 0$

(v) $5x^5 - 7x^4 - 10x^3 - 23x^2 - 90x - 317 = 0$

(2) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப் பிரிக்க.

(i) $3x^4 - 4x^3 - 6\ ^2 + 12 - 1 = 0$

(ii) $3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$

(iii) $2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 20x^2 + 40x + 5 = 0$

(iv) $x^{1} - 10x^3 + 5 = 0$

(v) $x^6 - 6x^5 + 4 = 0$

(3) $(x+3)^3 - A(x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மூன்று மெய்யெண் தீர்வுகள் உண்டெனின், A-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(4) $x^3+px+q=0$ என்ற சமன்பாடு மூன்று வேறுவேறு மெய்யெண் தீர்வுகளைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனை $4p^3\ 27q^2 < 0$ என நிறுவுக.

(5) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப் பிரிக்க (வின்சென்ட் தேற்றத்தைத் தழுவி)

(i) $2x^3-3x^2+4x-1=0$

(ii) $x - 2x^3+3x^1-7x + 1=0$

(iii) $x^4+6x^3-7x^2-4x+8=0$

(iv) $x^4+10x^3+23x^2+6x-2=0$

(v) $2x^5-3x^4+x^3-2x^2+x-1=0$

(6) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப் பிரிக்க: (ஸ்டர்ம் தேற்றத்தைத் தழுவி)

(i) $x^3-3x+1=0$

(ii) $x^3-6x^2+8x+40=0$

(iii) $16x^4-32x^3+88x^2-8x+17=0$

(iv) $x^4-4x^3+12x^2-12x+5=0$

(v) $x^4-4x^3+x^2-1=0$

(vi) $x^4+2x^3+4x+10=0$

(vii) $x^5+5x^4-20x^2-10x+2=0$

(viii) $x^6-6x_5+15x^4-20x^3+30x^2-24x+14=0$

(iv) $x^6-6x^5+16x^4-24x^3+22x^2-12x+4=0$

(x) $5x^6-30x^5+75x^4-90x^3+60x^2-18x-2=0$

விடை

(1) (i) 10 (ii) 6 (iii) 6 (iv) 3 (v) 7

(2) (i) $[-2, -1)$; $(-1, 1)$

(ii) $(-2, -1)$; $(1, 2)$ (iii) $(-1, 0)$

(iv) $(0, 1)$; $(1, 2)$ (v) $(0, 1)$; $(5, 6)$

(3) $A \geq 27$.

(5) (i) $(0, 1)$

(ii) $(-18, -17)$; $\left(\frac{16}{5}, \frac{29}{9}\right)$; $\left(\frac{29}{9}, \frac{13}{4}\right)$

(iii) $(-7, -6)$; -1; இரு கற்பனைத் தீர்வுகள்

(iv) $(-7, -6)$; $(-3, -2)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$

(v) $(1, 2)$; நான்கு கற்பனைத் தீர்வுகள்

(6) (i) $P = x^3 - 3x + 1$. $P_1 = x^2 - 1$. $P_2 = 2x - 1$.

$P_3 = +1$. $(-2, -1)$; $(0, 1)$. $(1, 2)$.

(ii) $P = x^3 - 6x^2 + 8x + 40$

$P_1 = 3x^3 - 12x + 8$ $P_2 = x - 17$ $P_3 = -1$

$(-2, 1)$.

(iii) $P = 16x^4 - 32x^3 + 88x^2 - 8x + 17$.

$P_1 = 8x^3 - 12x^2 + 22x - 1$,

$P_2 = -2x^2 - x - 1$.

எல்லாத் தீர்வுகளும் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

(iv) $P = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 12x + 5$.

$P_1 = x^3 - 3x^2 + 6x - 3$.

$P_2 = -3x^2 \times 3x - 2$.

எல்லாம் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

(v) $P = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2.$

$P_1 = 2x^3 - 6x^2 + x$

$P_2 = 5x^2 - x + 2.$ $(-1,)$; $(3, 4).$

(vi) $P = x^4 + 2x^2 - 4x + 10.$

$P_1 = x^3 + \ - 1$ $P_2 = -x^2 + 3x - 10$

எல்லாம் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

(vii) $P = x^5 + 5x^4 - 20x^2 - 10x + 2.$

$P_1 = x^4 + 4x^3 - 8x - 2.$

$P_2 = x^3 + 3x^2 - 1.$ $P_3 = 3x^2 + 7x + 1.$

$P_4 = 17x + 11$ $P_5 = +1$

$(-4, -3)$; $(-3, -2)$; $(-1, 0)$;

$(0, 1)$; $(1, 2).$

(viii) $P = x^6 - 6x^5 + 16x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 24x + 14.$

$P_1 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 10x - 4.$

$P_2 = -x^2 + x - 1.$

எல்லா தீர்வுகளும் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

(ix) $P = x^6 - 6x^5 + 16x^4 - 24x^3 + 22x^2 - 12x + 4$

$P_1 = 3x^5 - 15x^4 + 32x^3 - 36x^2 + 22x - 6.$

$P_2 = -x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 6.$

எல்லாம் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

(x) $P = 5x^6 - 30x^5 + 75x^4 - 90x^3 + 60x^2 - 18x - 2$

$P_1 = 5x^5 - 25x^4 + 50x^3 - 45x^2 + 26x - 3$

$P_2 = -x^3 + x^2 - x + 1$

$= -(x - 1)\ (x^2 + 1)$

$(-1, 0)$, தீர்வு 1.

9. தோராயத் தீர்வுகள்

(Approximate Evaluation of Roots)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளின் எல்லையை எப்படி அறிவது எனப் பார்த்தோம். இனி அத் தீர்வுகள் அளவுக்கிணங்காதவைகளாயிருப்பின், நாம் விரும்பும் பதின் பகுப்பு வரை அவற்றின் தோராய மதிப்பைக் காண்பது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

தீர்வுகளின் தோராய மதிப்பினைக் காண்பதற்கு நியூட்டன் முறை, ஹார்னர் முறை, யூரியர் விதி, லெக்ராஞ்சு முறை போன்ற பல வழிகள் உள்ளன. இங்கு நாம் குறிப்பாக நியூட்டன் முறையையும், ஹார்னர் முறையையும் பார்ப்போம்.

1. நியூட்டன் முறை (Newton Method)

$f(x) = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு என்க α என்பது இதன் தோராயத் தீர்வு என்றும், $(\alpha + h)$ சரியான தீர்வு எனவும் கொள்வோம்.

எனவே, $f(\alpha + h) = 0$

ஆனல்,

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{h}{1!} f'(\alpha) + \frac{h^2}{2!} f''(\alpha) + \dots$$

[டெய்லர் தொடர்] அதாவது,

$$0 = f(\alpha) + \frac{h}{1!} f'(\alpha) + \frac{h^2}{2!} f''(\alpha) + ! \text{ ஆகும்.}$$

h மிகவும் சிறியதாகையால், h^2, h^3, விலக்கிவிட்டால்,

$0 \doteq y(\alpha) + hf'(\alpha)$ எனக் காண்கின்றோம்.

$$\therefore h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

எனவே, தீர்வின் தோராய மதிப்பு.

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

ஆகும். இதனை முதல் தோராய மதிப்பாகக் கொண்டு, சற்று அதிகம் நெருங்கிய தோராய மதிப்பினைக் காணலாம்.

எனவே,

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \text{ என்க.}$$

$\therefore \alpha_1 + h$ என்பது அடுத்த தோராய மதிப்பாகும்.

$$\therefore f(\alpha_1 + h) = f(\alpha_1) + \frac{h}{1!} f'(\alpha_1) + \frac{h^2}{2!} f''(\alpha_1) + \ldots$$

$$= 0.$$

$$\therefore h = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

$\therefore$ அடுத்த நெருங்கிய தோராய மதிப்பு

$$\alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

அதாவது, $\left[\alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right] - \dfrac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$ ஆகும்.

இவ்வாறு இம்முறையைத் திரும்ப திரும்பச் செயல்படுத்த, நாம் விரும்பும் அளவிற்குத் தோராயத் தீர்வினைக் காணலாம். இவ்வாறு தோராயத் தீர்வு காணும் முறையைத்தான் நாம் நியூட்டன் முறை என்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 2x - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 2 ஒரு தோராயத் தீர்வெனில், மூன்று முறைத் தோராய மதிப்பளந்து கூறுக.

$$f(x) = x^3 - x - 5$$

$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f(2) = -1$$

$$f^1(2) = 10$$

$$\therefore h \text{ (முதல் திருத்தம்)} = 2 - \frac{-1}{10}$$

$$= 2{\cdot}1$$

எனவே முதல் தோராயத்தீர்வு = 2·1

$$f(2{\cdot}1) = {\cdot}061$$

$$f^1(2{\cdot}1) = 12{\cdot}23.$$

$$\therefore \text{ இரண்டாம் தோராயத்தீர்வு} = 2{\cdot}1 - \frac{{\cdot}061}{12{\cdot}23}$$

$$= 2{\cdot}0951$$

$$f\ (2{\cdot}0951) = 0{\cdot}006824145351$$

$$f'(2{\cdot}0951) = 11{\cdot}16933203$$

$$\therefore \text{ மூன்றும் தோராயத்தீர்வு} = 2{\cdot}0951 - \frac{0{\cdot}006124145351}{11{\cdot}16833203}$$

$$= 2{\cdot}094551 \text{ ஆகும்.}$$

2. ஹார்னர் முறை (Horner's Method)

இம் முறை மற்ற முறைகளை விட மிகச் சிறந்த முறையாகக் கருதப்படுகின்றது. இதில் வேண்டிய கணக்கீடுகள் சிறந்த, எளிய முறையில் செய்யப்படுவதோடு, அதிக சிரமமின்றி எந்தப் பதின் பகுப்புப்பகுதிவரையும் காணலாம். இனி இம்முறையைக் கவனிப்போம்.

$f(x) = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு என்க. x–ன் எந்த அடுத்தடுத்த முழு எண் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ எதிரெதிர் குறிகளைப் பெறுகின்றன எனக்கண்டுபிடி. அவை α, $\alpha + 1$ எனக்கொள்வோம். எனவே, $f(x)$-ன் ஒரு தீர்வாவது $(\alpha, \alpha + 1)$-க்குள் இருக்கும். அத்தீர்வை $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ என்க. $f(x) = 0$–ன் தீர்வுகளில் α ஐக் குறைப்போம். இப்பொழுது மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ஆகும். மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $f_1(x = 0)$ என்க. $f_1(x) = 0$ ஆனது, β, $\beta + 1$ என்ற அடுத்தடுத்த மதிப்புகளுக்கு எதிரெதிர் குறியைப் பெறுமாயின், $f_1(x) = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $(\beta, \beta + 1)$-க்குள் இருக்கும். $f_1(x) = 0$-ன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்குக. எனவே, $f_1(x) = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $a_1 \cdot a_2\, a_3\, a_4 \ldots$ ஆகும். எனவே, $\beta = a_1 x_1$ ஆகும். இப்பொழுது $f_2(x) = 0$-ன் தீர்வுகளில் β-வைக் குறை. புதிய சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்குக. மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $f_2(x) = x$ என்க. இதன் ஒரு தீர்வு $a_2 \cdot a_3\, a_4 \ldots$ ஆகும். $f_2(x) = 0$ என்பது எந்த அடுத்தடுத்த எண்களுக்கு எதிரெதிர் குறியைப் பெறுகின்றது எனக்காண்போம். அவை $(\gamma, \gamma + 1)$ என்க. எனவே, முன்பு பார்த்ததுபோல், $\gamma = \gamma_2$ ஆகும். பின்பு $f_2(x) = 0$-ன் தீர்வுகளில் γ வைக்குறை. பின்பு 10ஆல் பெருக்கு. இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்படுத்திக் கொண்டே போனால், $a_1, a, \ldots$ வைக் காணலாம். எனவே வேண்டிய பதின் பகுப்புப்பகுதிவரை (upto desired decimal) காணலாம். இம் முறையை நாம் ஹார்னர் முறை என்கின்றோம்.

[**குறிப்பு 1:** ஒன்றிரண்டு முறைகளுக்குப் பிறகு கிடைக்கும் சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் மிகப்பெரிய எண்களாக இருக்கும். அப்போது எந்த இரண்டு x-ன் அடுத்தடுத்த மதிப்புகளுக்குச்சமன்பாடு எதிரெதிர் குறிகளைப் பெற்றிருக்கும் என அறிவது கடினமாகும். இம்மாதிரி நிலையில், அச் சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலியை x–ன் கெழுவால் வகுக்கக் கிடைக்கும் எண்ணின் முழு எண் பகுதியும், அதற்குப் பக்கத்து எண்களில் ஒன்றும் தேவையான அடுத்தடுத்த x–ன் மதிப்புகளாக இருக்கும்.]

[**குறிப்பு 2:** குறையெண் தீர்வைக்காண வேண்டியிருப்பின் $f(-x) = 0$ –ன் கூட்டெண் தீர்வைக் கண்டு, முன்புபோல தொடர்ந்து, இறுதியில் (—) குறியிட வேண்டிய குறையெண் தீர்வைப் பெறலாம்.]

எடுத்துக்காட்டு 2 :

1-க்கும், 2-க்கும் இடைப்பட்ட $x^3 - 4x^2 + 5 = 0$ — ன் தீர்வை நான்கு பதின் பகுப்பு பகுதிவரை காண்க.

வேண்டிய தீர்வின் மதிப்பு $1 . a_1 a_2 a_3 a_4$ என்க.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5 = 0$ -ன் தீர்வுகளின் மதிப்பில் 1ஐக் குறை.

1	1	-4	0	5
	0	1	-3	-3
	1	-3	-3	2
	0	1	-2	
	1	-2	-5	
	0	1		
	1	-1		
	0			
	1			

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0$ ஆகும். இதன் ஒரு தீர்வு $a_1 a_2 a_3 a_4$ ஆகும்.

இதன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்கு.

$$\therefore \quad f_1(x) = x^3 - 10x^2 - 500x + 2000 = 0.$$

இதன் ஒரு தீர்வு $a_1 \cdot a_2 a_3 a_4$ ஆகும்.

$$f_1(3) > 0$$

$$f_1(4) < 0$$

$\therefore$ (3, 4)-ல் $f_1(x) = 0$ ஒரு தீர்வு உண்டு.

எனவே $a_1 = 3$ ஆகும்.

$f_1(x) = 0$-ன் தீர்வுகளில் 3 ஐக் குறைக்க,

3	1	− 10	− 500	2000
	0	3	− 21	− 1563
	1	− 7	− 521	437
	0	3	− 12	
	1	− 4	− 533	
	0	3		
	1	− 1		
	0			
	1			

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^3 - x^2 - 533x + 447 = 0$ ஆகும். இதன் ஒரு தீர்வு $\cdot a_2 a_3 a_4$ ஆகும். இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்கி வரும் சமன்பாட்டை $f_2(x) = 0$ என்க.

$$\therefore f_2(x) = x^3 - 10x^2 - 53300x + 437000 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$f_2(x) = 0$ -ன் ஒரு தீர்வு $a_2 \cdot a_3 a_4$

$$f_2(8) > 0$$

$$f_2(9) < 0 \quad .$$

$\therefore a_2 = 8$. எனவே $f_2(x) = 0$ -ன் தீர்வுகளின் மதிப்பில் 8 ஐக் குறைக்க,

8	1	− 10	− 53300	+ 437000
	0	8	− −16	− 426528
	1	− 2	− 53316	10472
	0	8	48	
	1	6	− 53268	
	0	8		
	1	14		
	0			
	1			

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 + 14x^2 - 53268 + 10472 = 0$$ ஆகும்.

இதன் ஒரு தீர்வு $\cdot a_3 a_4 \ldots$ ஆகும். இதன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்க,

$f3(x) = x + 140x^2 - 5326800 + 1047\ 2000 = 0$ எனப் பெறுகிறோம். இதன் ஒரு தீர்வு $a_3 . a_4 \ldots$

$$f_3(1) > 0$$
$$f_3(2) \angle 0 \quad .$$

எனவே $a_3 = 1$ ஆகும், $f_3(x) = 0$-ன் தீர்வுகளின் மதிப்பில் 1 ஐக் குறைக்க,

1	1	140	− 5326800	10472000
	0	1	141	− 5326659
	1	141	− 5326659	5145341
	0	1	142	
	1	142	− 5326517	
	0	5		
	1	143		
	0			
	1			

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$x^3 - 143\,x^2 - 5326517\,x + 5145341 = 0$ ஆகும். இதன் ஒரு தீர்வு $0\,.\,a_4 \ldots$ ஆகும். இதன் தீர்வுகளை 10ஆல் பெருக்க,

$f_4(x) = x^3 - 1430\,x^2 - 532651700\,x + 5145341000 = 0$ என கிடைக்கப் பெறும். இதன் தீர்வுகளில் ஒன்று $a_4 \ldots \ldots \ldots \ldots$ $f_4(9) > 0,\ f_4(10) < 0 \ .\ \therefore\ a_4 = 9$ ஆகும்.

அதாவது $x^3 - 4\,x^2 + 5 = 0$-ன் ஒரு தீர்வு $1{\cdot}3819$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

25-ன் முப்படி மூலம் ஹார்னர் முறையில் இரண்டு பதின் பகுப்புப் பகுதிவரை காண்க.

இங்கு நாம் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டிய சமன்பாடு

$f(x) = x^3 - 25 = 0$ என்பதாகும். ... (1)

இச் சமன்பாட்டிற்கு கூட்டெண் தீர்வு (2, 3)-க்குள் இருக்கும் எனக் காண்கின்றோம்.

எனவே, $x^3 - 25 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளின் மதிப்பில் இரண்டைக் குறைக்க,

2	1	0	0	− 25
		2	4	8
		2	4	− 17
		2	8	
		4	12	
		2		
		6		

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$x^3 + 6\,x^2 + 12\,x - 17 = 0$ ஆகும்.

இதன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்கி வரும் சமன்பாடு

$$x^3 + 60x^2 + 1200x - 17000 = 0 \quad . \qquad \ldots(2)$$

இதன் தீர்வு (9, 10)-க்குள் இருக்கும் எனக் காண்கின்றோம்:

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $2 \cdot a_1 a_2$ எனக் கொள்வோமாயின், (2)-லிருந்து $a_1 = 9$ எனக் காண்கின்றோம்.

(2)-ன் தீர்வுகளின் மதிப்பில் 9 ஐக் குறைக்க,

9	1	60	1200	− 17000
		9	621	16389
		69	1821	− 611
		9	702	
		78	2523	
		9		
		87		

மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$x^3 + 87x^2 + 2523x - 611 = 0$ ஆகும். இதன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்க,

$x^3 + 870x^2 + 252300x - 611000 = 0$ எனப் பெறப்படும்.

இதன் தீர்வு 2-க்கும் 3-க்கும் இடையில் எனக் காணலாம். எனவே, $a_2 = 2$ எனக் காண்கின்றோம்.

எனவே,

$$x\text{-ன் தோராய மதிப்பு} = 2{\cdot}92$$

அதாவது $\sqrt[3]{25} = 2 \cdot 92$

$\therefore \quad (2 \cdot 92)^3 = 24 \cdot 89$ (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 3

$4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய்யெண் தீர்வை இரண்டு பதின்பகுப்புப் பகுதிவரை காண்க.

$$f(x) \equiv 4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0 \text{ என்க.} \qquad \ldots (1)$$

இங்குக் கூட்டெண் தீர்வு (6, 7,) - ல் இருக்கின்றது என எளிதில் காணலாம். ஆகவே முதலில் $f(x) = 0$ -ன் தீர்வுகளின் மதிப்பில் 6 குறைவாக உள்ள சமன்பாட்டைக் காண்போம்

6	4	− 13	− 31	− 275
		24	66	310
		11	35	− 65
		24	210	
		35	245	
		24		
		59		

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$4x^3 + 59x^2 + 245x - 65 = 0 \qquad \ldots (2)$$

$f(x) = 0$ - ன் தீர்வு $6 \cdot a_1 a_2$ எனின், (2) - ன் ஒரு தீர்வு $\cdot a_1 a_2$ ஆகும். (2) - ன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்க,

$f_1(x) \equiv 4x^3 + 590x^2 + 24500x - 65000 = 0$ எனப் பெறப்படும். $f_1(x) = 0$ -ன் ஒரு தீர்வு $a_1\, a_2$ ஆகும். $f_1(x) = 0$ -ன் ஒரு தீர்வுகளின் மதிப்பில் a_1 குறைவாக உள்ள சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

இங்கு, $f_1(x)$ -ன் ஒரு தீர்வு $(2, 3)$-ல் இருக்கின்றது எனக் காணலாம். எனவே $a_1 = 2$ ஆகும்.

2,	4	590	24500	−65000
		8	1196	51392
		598	25696	−13608
		8	1212	
		606	26908	
		8		
		614		

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$4x^3 + 614x^2 + 26908x - 13608 = 0$ ஆகும்.

இதன் தீர்வில் ஒன்று a_2 ஆகும். இதன் தீர்வுகளை 10 ஆல் பெருக்க.

$f_3(x) \equiv 4x^3 + 6140x^2 + 2690800x - 13608000 = 0 \ldots(3)$ எனப் பெறுகின்றோம். இதன் கூட்டெண் தீர்வு 5 ஆகும். எனவே, $a_2 = 5$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கூட்டெண் தீர்வு 6·25 ஆகும்.

மேலே கண்ட எல்லா கணக்கீடுகளையும் கீழ்க்கண்டவாறு ஒரே வழியில் காண்பிக்கலாம்.

சமனபாடு (1) → 4	—13	—31	—275	(6 25
தீரவுகளின மதிபபில 6 ஐக குறைககை→	24	66	210	
	11	35	—65000	
	24	210	51392	
	35	24500	—13608000	
	24	1196	13608000	
			0 ↓	
சமனபாடு (2)→ (தீரவுகளை 10 ஆல பெருககிய பிறகு) தீரவுகளின மதிபபில→ 2 ஐக குறைகக	590	25696		
	8	1212		
	598	26908000	இசசமனபாட டின தீரவு எனபதைக காணபிக கினறது	
	8	30800		
	606	2721600		
	8			
சமனபாடு (3) (10 ஆல பெருககிய பிறகு) தீரவுகளின மதிபபில 5 ஐக குறைகக →	6140			
→	20			
	6160			

எடுத்துக்காட்டு 4

$x + x + x - 100 = 0$ -ன கூடடெண தீரவை மூனறு பதின பகுபபு பகுதிவரை காணக

இச சமனபாடடிறகு (4, 5) ல ஒரு தீரவு உணடெனக காணலாம எனேவ, இதன தீரவுகளின மதிபபுகளில 4 ஐக குறைதது, பினபு முனபுபோல தொடர, அடுதத பககததில உளளவாறு பெறலாம

1	1	1	—100	(4·264
	4	20	84	
	5	21	—16000	
	4	36	11928	
	9	5700	—4072000	
	4	264	3788376	
	130	5964	—283624000	
	2	268	256071744	
	132	623200	—27552256000	
	2	8196		
	134	631396		
	2	8232		
	1360	63962800		
	6	55136		
	1366	64017936		
	6	55152		
	1372	6407308800		
	6			
	13780			
	4			
	13784			
	4			
	13788			
	4			
	137920			

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கூட்டெண் தீர்வின் தோராய மதிப்பு 4. 264 ஆகும்.

3. சுருக்கிய ஹார்னர் முறை (Contracted Horner's Process)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வின் தோராய மதிப்பை எட்டு அல்லது ஒன்பது பதின்பகுப்புப் பகுதிக்குக் காணவேண்டுமானுல், வழக்கமாகச் செயல்படுத்தும் ஹார்னர் முறை மிகவும் கடினமாக இருக்கும். எனவே, அம்மாதிரி நிலையில்சுருக்கிய ஹார்னர் முறையைப் பயன்படுத்துகின்றோம். இம் முறையை நாம் பொதுவாக நான்கு அல்லது ஐந்து பதின் பகுப்புப் பகுதிவரை தோராய மதிப்பைக் கண்டறிந்த பிறகு பயன்படுத்துகின்றோம்.

இங்கு மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் பூச்சியங்களைச் சேர்த்துக்கொண்டே போவதற்குப் பதிலாக, ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் வலப்புறமிருந்து எண்களை நீக்கிக்கொண்டு வருகின்றோம். இங்கு இறுதி உறுப்பு மாறுமலிருக்கும். கடைசியிலிருந்து இரண்டாவது உறுப்பில் வலப்புறமிருந்து ஓர் எண்ணையும், மூன்றுவது உறுப்பில் வலப்புறமிருந்து இரண்டு எண்ணையும். நான்காவது உறுப்பில் வலப்புறமிருந்து மூன்று எண்ணையும்......ஆக நீக்கிக் கொண்டு வருவோம். பின்பு அடுத்த கெழுவை வகுக்கும் எண்ணுகக்கொண்டு முன்போல் செயல்படுத்துகின்றோம். இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்படுத்திஞல், இறுதில் இரண்டு வகுபடும் எண்களைப் பெறுவோம். அப்பொழுது இது சாதாரண வகுத்தலாகின்றது. இம்முறையை விளக்கமாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டின் மூலம் நன்கறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

111 -ன் முப்படி மூலத்தை ஹார்னர் முறையில் காண்க.

இங்கு நாம் பெறும் சமன்பாடு $x^3 - 111 = 0$ என்பதாகும். இச் சமன்பாட்டிற்கு (4,5) ஒரு கூட்டெண் தீர்வு உண்டு எனக் காண்கின்றோம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளதிலிருந்து 111 -ன் முப்படி மூலம் பதின்மூன்று பதின்பகுப்பு பகுதிவரை காணப் படுகின்றது. ஆகவே, இதன் தோராய மதிப்பு

$$4.8058955337054\ldots\ldots$$

எனப் பெறப்படும்.

1	0	0	—111	(4.8058955337054
	4	16	64	
	4	16	—47000	
	4	32	46592	
	8	4800		
		1024	—408000000	
	4		345960125	
	120	5824		
	8	1088	—62039875000	
			55420486112	
	128	69120000		
	8	72050	—6619388888	
			6235959465	
	136	69192025		
	8	72050	—383429423	
			346449040	
	14400	6926407500		
	5	1153264	—36980383	
			34644940	
	14405	6927560764		
	5	1153328	—2355443	
			2078696	
	14410	6928714092		
	5	12976	—256747	
			207869	
	144150	692884385		
	8	129761	—48878	
			48503	
	144158	692897461		
	8	72	—375	
			346	
1	144166	69289808		
	8	72	—29	
			27	
	1441714	69289880	—2	
	1441	6928988		
	14			

பயிற்சி

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவாறு, சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை கணிக்க.

(1) $x^3 - 3 = 0$ ஆறு பதின்பகுப்பு பகுதிவரை

(2) $2x^3 - 5 = 0$,, ,, ,,

(3) $x^3 - x - 1 = 0$,, ,, ,,

(4) $3x^3 - 7x^2 - 2x + 5 = 0$,, ,, ,,

(5) $6x^3 - 7x^2 - 10x + 5 = 0$,, ,, ,,

(6) $2x^3 - 11x^2 + 10x - 1 = 0$ ஏழு ,, ,,

(7) $x^3 - 20x^2 - 31x - 1509 = 0$,, ,,

(8) $2x^3 - 15x^2 - 8x - 166 = 0$,, ,, ,,

(9) $3x^4 - 10x^3 - 6x - 16 = 0$,, ,, ,,

(10) $3x^4 - 2x^2 - 34x - 40 = 0$,, ,, ,,

(11) ஹார்னர் முறைப்படி கீழ்கண்டவற்றை மூன்று பதின்பகுப்பு பகுதிவரை காண்க.

(i) $\sqrt[3]{18}$ (ii) $\sqrt[4]{20}$ (iii) $\sqrt[5]{100}$

(12) 4129-ன் முப்படி மூலத்தை ஏழு பதின்பகுப்புப் பகுதி வரை காண்க.

(13) $6x^3 - 7x^2 + 10x + 5 = 0$-ல் உள்ள குறையெண் தீர்வை எட்டு பதின்பகுப்புப் பகுதி வரை காண்க.

(14) $x^3 - 9x - 9 = 0$-ன் கூட்டெண் தீர்வை எட்டு பதின் பகுப்புப் பகுதி வரை காண்க.

(15) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$-ன் கூட்டெண் தீர்வை எட்டு பதின் பகுப்புப் பகுதி வரை காண்க.

விடை

(1) 1·442249 (2) 1·357208 (3) 1·324717

(4) −0·644513 (5) −0·372137 (6) 0·1147994

(7) 13·8440609 (8) 5·2100159 (9) 1·2783089

(10) 1·4007219

(11) (i) 2·6207 (ii) 2·1147 (iii) 2·611

(12) 16·0428539 (13) −0·37213778

(14) 3·41147412 (15) 1·90785326

4. வரைப்பட முறை (Graphical Method)

இதுவரை பார்த்த முறைகளோடு, வரைப்படமுறை மூலமும் தோராயமாகக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தன்மையை அறியலாம்.

$f(x) = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு என்க. $y = f(x)$ என்னும் வளைவரை x ஆயத்தின் எப்புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக் காணவேண்டும். இப் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் தான் $f(x)=0$-ன் தீர்வுகளாகும். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு முப்படி, நாற்படிச் சமன்பாடுகளாயின், எவ்வாறு எளிதான முறையில் வரைப்படத்தினைப் பயன்படுத்தித்தீர்வு களைக் கண்டுபிடிப்பது எனக் கீழ்காணும் எடுத்துக் காட்டுகளின் மூலம் காண்போம்.

5. முப்படிச் சமன்பாடு

(i) $f(x) = x^3 + ax + b = 0$ என்பது கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாடு என்க.

$\therefore \quad x^3 = -ax - b$ என எழுதலாம்.

$y = x^3$, $y = -ax - b$ என்ற இரு வரைப் படங்களை வரைவோம். இவ்விரண்டும் வெட்டுப் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள்தான் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

(ii) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ என்க.

$\therefore \quad x^3 = -(ax^2 + bx + c)$

எனவே $y = x^3$

$$y = -(ax^2 + bx + c)$$

என்ற இரு வரைப் படங்கள் வரைந்தால், இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள்தான் கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

6. நாற்படிச் சமன்பாடு

$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்பது கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாடு என்க.

இரண்டு கூம்பு வெட்டிகள் நான்கு பொதுப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்கும். எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை இரண்டு கூம்பு வெட்டிகளின் சமன்பாடுகளாக்குவோம்.

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x\right)^2 - \frac{p^2}{4}x^2 + qx^2 + rx + s = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x\right)^2 + x^2 + \left(q - 1 - \frac{p^2}{4}\right)x^2 + rx + s = 0$$

$\therefore \quad x^2 + \dfrac{p}{2}x = y$ என்க. ... ...(1)

$$\therefore \quad y^2 + x^2 + \left(q - 1 - \frac{p^2}{4}\right)\left(y - \frac{p}{2}x\right)$$

$$+ rx + s = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + x\left[r - \frac{p}{2}\left(q - 1 - \frac{p^2}{4}\right)\right]$$

$$+ y\left[q - 1 - \frac{p^2}{4}\right] + s = r \qquad \text{...(2)}$$

இது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகும். எனவே (1) ஒரு பரவளையத்தையும், (2) ஒரு வட்டத்தினையும் குறிக்கின்றன.

இவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளே கொடுத்துள்ள சமன் பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 6x - 9 + 0$ஐ வரைப்படம் மூலம் சேர்க்க.

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

$$x^3 = 6x + 9$$

$$y = x^3$$

$$y = 6x + 9$$

என்ற வளைவரைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளுக்குச் சமமாகும்.

$y = x^3$ என்ற வளைவரைக்கு

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−27	−8	−1	0	1	8	27	64

என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கவேண்டும்.

$y = 6x + 9$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு

x	−1	0	1
y	3	9	15

என்ற புள்ளிகளைச்சேர்.

கீழ்க்கண்ட படம் 6-லிருந்து இச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு மெய்யான தீர்வு மட்டுமே உள்ளது என அறிகின்றோம். அதன் மதிப்பு படத்தினின்று 3 ஆகும். மற்ற இரண்டு தீர்வுகளும் கற்பனைத் தீர்வுகள்.

$x \;\; - 6x - 9 = 0$ ஐ

$(x - 3)$ ஆல வகுகக ஈவு

$x \;\; + 3x + 3 = 0$ ஆகும

$$x = \frac{-3 \pm x\sqrt{-12}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

ஆகவே, கொடுககபபடட சமனபாடடின தீரவுகள

$$3, \quad \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$ ஆகும

எடுத்துக்காட்டு 2

வரைபபடம மூலம $x \;\; +2x \;\; -7x \;\; -8x+12=0$ ஐத தீரகக

$x \;\; +2x \;\; -7x \;\; -8x+12=0$ ஐ

$(x \;\; +x) \;\; -8 \; ^2 -8x+12=0$ என எழுதலாம

$(x^2+x)^2+x^2-9x \;\; -9x+x+12=0$

$(x \;\; +x)=y$ எனக (1)

$y^2+x \;\; -9y+x+12=0$ (2)

இது ஒரு வடடததின சமனபாடு இதன மையம $(-\frac{1}{2} \;\; \frac{9}{2})$ ஆகும

ஆரம $\sqrt{\frac{81}{4} + \frac{1}{4}}$ 12

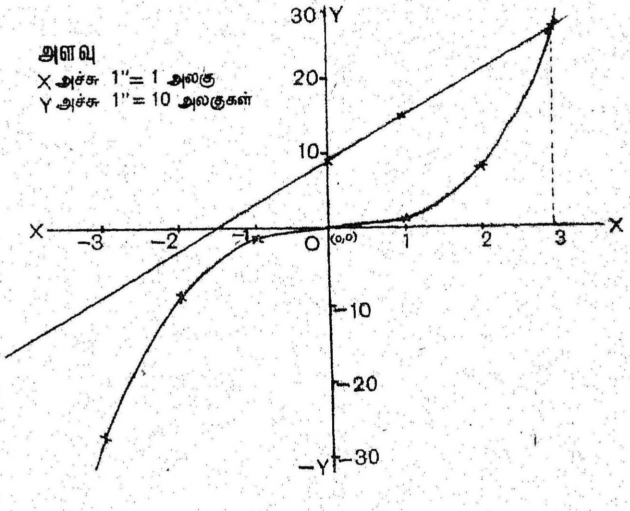
$\sqrt{\frac{34}{4}}$ = 2 9 ஆகும (தோராயமாக)

$y = x^2 + x$ஐ வரைய

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	6	2	0	0	2	6

என்ற புள்ளிகளைச் சேர்.

வட்டத்தின் மையமும் ஆரமும் தெரியுமாதலால், வட்டத்தை வரைய முடியும். ஆகவே, அதில் வெட்டும் புள்ளிகள் தெரியும். இவை இரண்டும் நான்கு மெய்ப்புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. ஆகவே, இச் சமன்பாட்டின் அனைத்துத் தீர்வுகளும் மெய்யெண் என்றாகின்றது. அவற்றின் மதிப்பு —3, —2, 1, 2 ஆகும். (படம் 6ஐப் பார்க்கவும்).



படம்- 6.

எடுத்துக்காட்டு 3:

கீழ் வரும் சமன்பாடுகளுக்கு வரைப்படம் வரைந்து தீர்வுகளைக் காண்க. எத்தனை மெய்யெண், கற்பனைத் தீர்வுகள் என்பதையும் காண்க,

(i) $x^3-2x-20=0$ — (67 A செ.ப.)

(ii) $x^3-3x^2+3x-7=0$ — (69 A செ.ப.)

(iii) $x^4+x^2+4x-7=0$ — (65 A செ.ப.)

(i) $f(x) \equiv x^3-2x-20=0$ என்க.

$f(x)=0$-ல் ஒரே ஒரு குறிமாற்றம்தான் உண்டு. எனவே, ஒரே ஒரு கூட்டெண் தீர்வுதான் உண்டு.

$$f(-x) = -x^3+2x-20$$

இதில் இரண்டு குறிமாற்றம் உள்ளதால், இரண்டு குறையெண் தீர்வுகளுக்கு மேல் இருக்காது.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு குறையெண் தீர்வுகளும், ஒரு கூட்டெண் தீர்வும் உள்ளன. வரைப்படம் மூலம் தீர்வைக் காண

$$y = x^3$$
$$y = 2x+20$$

என்ற வரைப்படங்களை வரைக.

$y=x^3$ வரைய

x	0	1	2	-2
y	0	1	8	-8

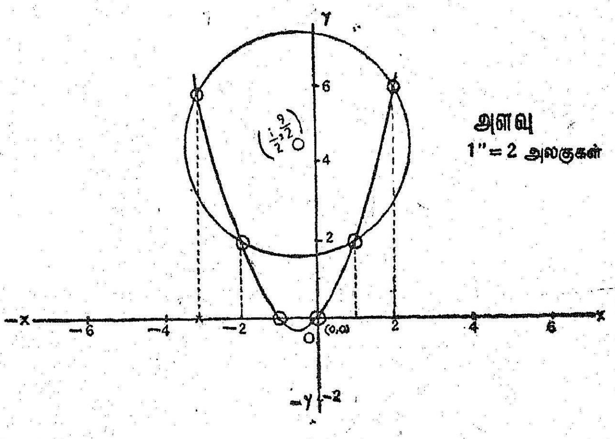
என்ற புள்ளிகளைச் சேர்

$y=2x+20$ என்பதை வரைய

x	-1	-2	0	1	2	4	-5
y	18	16	20	22	24	28	10

என்ற புள்ளிகளைச் சேர். (படம் 7ஐப் பார்).

இரு வரைப் படங்களையும் வரைந்தால், ஓர் இடத்தில் மட்டும்தான் வெட்டிக் கொள்கின்றன எனக் காணலாம். ஆகவே,



படம்-7.

ஒரு மெய்யெண் தீர்வு உண்டு. மற்ற இரண்டும் கற்பனைத் தீர்வுகளாகும். (படம் 8ஐப் பார்).

(ii) $x^3-3x^2+3x-7=0.$

இங்குத் தீர்வின் மதிப்பில் hஐக் குறைத்து, இரண்டாவது உறுப்பை நீக்குவோம்.

$$y=x-h$$

$$\therefore \quad x=y+h$$

$$\therefore \quad (y+h)^3-3(y+h)^2+3(y+h)-7=0.$$

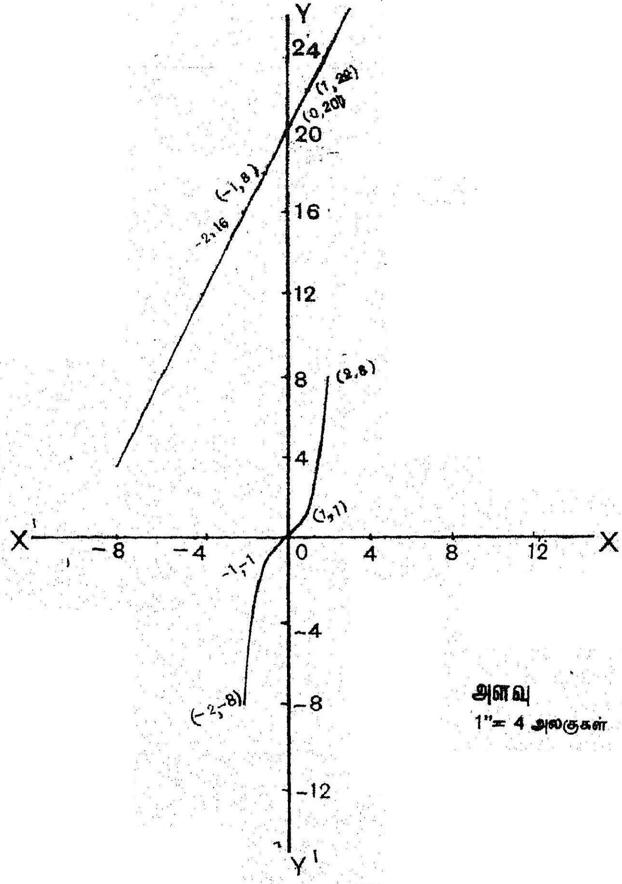
$$\therefore \quad y^3+y^2(3h-3)+\dots=0.$$

இங்கு $3h-3=0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad h=1.$$

எனவே, இரண்டாவது உறுப்பை நீக்க, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளின் மதிப்பில் 1ஐக் குறைக்கவேண்டும்,

1	1	−3	+3	−7
		1	−2	1
		−2	+1	−6
		1	−1	
		−1	0	
		1		
		0		



படம் 8.

∴ மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 - 6 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad y = x^3$$

$$y = 6$$

என்ற வரைகளை வரையவும்.

இரண்டும் ஒரே புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. ஆகவே ஒரே மெய்யெண் தீர்வு உண்டு. மற்ற இரண்டும் கற்பனைத் தீர்வுகள். (படம் 9ஐப் பார்க்கவும்.) இங்கு மெய்யெண் தீர்வு α ஆனால், $(\alpha+1)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

(iii) $x^4 + x^2 + 4x - 7 = 0.$

$y = x^2$ என்க. ... (1)

$\therefore \quad y^2 + x^2 + 4x - 7 = 0.$ ... (2)

(2) ஒரு வட்டத்தை குறிக்கின்றது.

மையம் $(-2, 0)$

ஆரம் $\sqrt{4+0+7} = \sqrt{11}$

1-ம் 2-ம் வெட்டும் புள்ளிகளின் x-ன் மதிப்பைக்காண்க.

அவைகளே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

$y = x^2$ வரைய

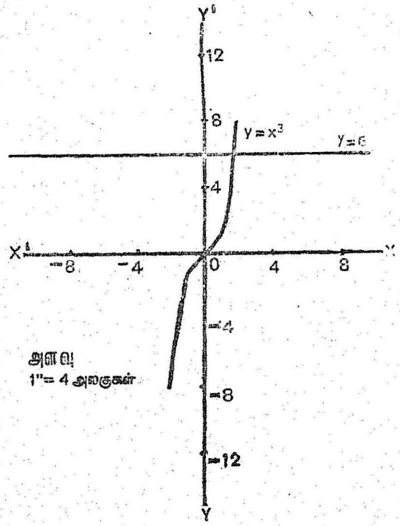
x	0	1	2	−1	−2
y	0	1	4	1	4

என்ற புள்ளிகளைச் சேர்.

1-ம் 2-ம் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு ஒரு கூட்டெண் தீர்வு, ஒரு குறையெண் தீர்வு, இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகள் உண்டெனக் காண்கின்றோம்.

குறிமாற்றங்களைக் கொண்டு கூடடெண் தீர்வும், குறையெண் தீர்வுகளும் ஒன்றுக்கு மேல் இருக்காது எனக் காண்கின்

றோம். எனவே, இரண்டு தீர்வுகள் கற்பனை எண்களே என அறியலாம். (படம் 9ஐப் பார்க்கவும்).



படம் 9.

எடுத்துக்காட்டு 4:

வரைப்படம் மூலம்

$$\text{Sin}\left(\frac{2x-3}{4}\right) = 2x - x^2 \text{ ஐத் தீர்.}$$

$$\text{இங்கு } y = \text{Sin}\left(\frac{2x-3}{4}\right)\text{-ம்.}$$

$$y = 2x - x^2\text{—ம்}$$

வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியைக்கண்டு சமன்பாட்டைத் தீர்க்கின்றோம்.

$-1 \leq \text{Sin}\,\frac{1}{4}\,\{2x-3) \leq 1$ ஆகையால், $-1 \leq 2x - x^2 \leq 1$-ன் இடைப்பட்ட மதிப்புகளை மட்டும் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

$$2x - x^2 = 1 - (1-x)^2.$$

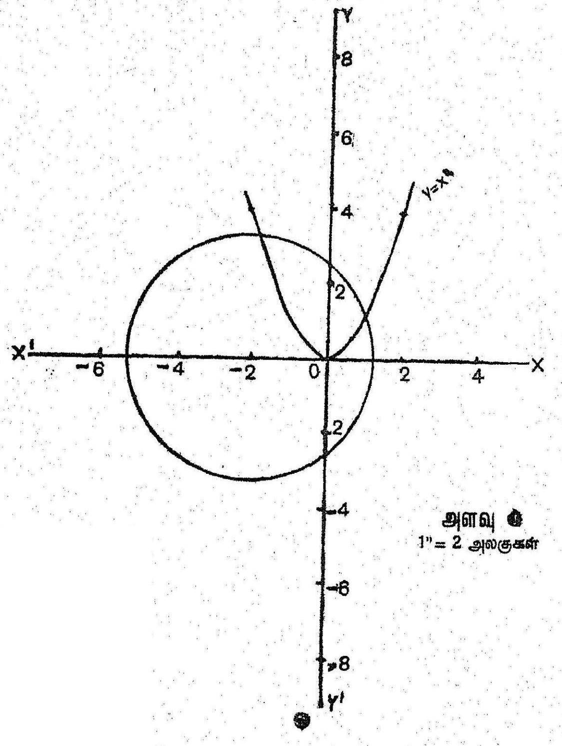
எனவே, $2x - x^2$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு 1 ஆகும். இவ்வரை $x = 1$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் சமச்சீராக அமைந்திருக்கின்றது.

மறுபடியும், $x = 1 \neq \sqrt{2}$ எனும்பொழுது, $2x - x^2 = -1$ ஆகையால், x-க்கு $(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$-ன் இடைப்பட்ட மதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டால் போதுமானது.

x-க்கு ரேடியன் அளவை எடுத்துக் கொண்டு, கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளைச் சேர்த்து வரையை வரையலாம்.

x	$-0{\cdot}5$	$-0{\cdot}25$	0	$0{\cdot}25$	$0{\cdot}5$	$0{\cdot}75$
$\frac{2x-3}{4}$	$-1{\cdot}0$	$-0{\cdot}875$	$-0{\cdot}75$	$-0{\cdot}625$	$-0{\cdot}5$	$-0{\cdot}375$
$\sin\left(\frac{2x-3}{4}\right)$	$-0{\cdot}842$	$-0{\cdot}768$	$-0{\cdot}678$	$-0{\cdot}585$	$-0{\cdot}480$	$-0{\cdot}366$
$2x-x^2$	$-1{\cdot}250$	$-0{\cdot}563$	0	$0{\cdot}438$	$-0{\cdot}750$	$0{\cdot}938$

(படம் 10ஐப் பார்க்கவும்)

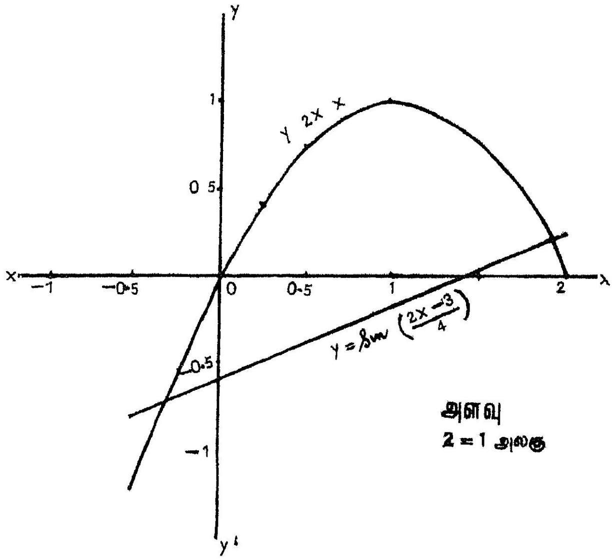


படம் 10.

x	1 0	1 25	1 5	1 75	2 0	2 25
$\frac{2x-3}{4}$	0 25	−0 125	0	0 125	0 25	0 375
$\sin\left(\frac{2x-3}{4}\right)$	−0 248	−0 225	0	0 125	0 248	0 366
$2x - x^2$	1 0	0 938	0 750	0 438	0	−0 563

படம் 11ஐப் பார்க்கவும்

படத்திலிருந்து வரைகள் இரண்டு புள்ளிகளில் மட்டும் வெட்டிக் கொள்கின்றன என்பதைக் காணலாம் ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு இரு தீர்வுகள் உள்ளன



படம் 11

ஒன்று கூட்டெண் தீர்வு மற்றொன்று குறையெண் தீர்வாகும் அவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 1 9, — 0 33 தோராயமாக

பயிறசி

வரைபபடம வரைநது தீரவு காணக

(1) $x - 7x - 6 = 0$

(2) $x - 3x - 2 = 0$

(3) $x - 6x - 9 = 0$

(4) $x - x - 33x + 61 = 0$

(5) $x - x + 2x - 3 = 0$

(6) $x - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

(7) $x - 7 = 0$

(8) $4x - 6x^2 + x + 2 = 0$

(9) $x + 5x^2 + 4x - 17 = 0$

(10) $x - 5x - 10x + 18 = 0$

— — -

கலைச்சொற்கள்

A

Abbreviation	—	குறுக்கம்
Abcissa	—	x – அச்சு ஆயத்தொலை
Absolute	—	அறு, தனி
,, value	—	தனி மதிப்பு
Accurate	—	பிழையற்ற, திட்டமான, மிகச்சரியான
Add	—	கூட்டு
Addend	—	கூட்டெண்
Addition	—	கூட்டல்
Adjacent	—	அடுத்த, அடுத்துள்ள
Admissible	—	ஏற்கத்தக்க
Algebra	—	இயற்கணிதம்
Algebraic	—	இயற்கணித
,, expression	—	இயற்கணிதச் சார்பு
,, function	—	இயற்கணிதக் கோவை
,, symbol	—	இயற்கணிதக் குறி
Alternate	—	ஒன்றுவிட்ட, ஒன்றுவிட்டொன்று
Analysis	—	கணிதப் பகுப்பு முறை
Answer (n)	—	விடை
,, (v)	—	விடை காண்க, விடை கூறு
Anticlockwise	—	இடம் சுழியாக, இடமாக
Antilogarithm	—	இன மடக்கை (இனமடக்கை)

Apply — பயன்படுத்து, பொருத்து
Approximate — தோராயமாக, அணித்தான, ஏறத்தாழ
,, solution — தோராயத் தீர்வு
,, value — தோராய மதிப்பு
Approximately — தோராயமாக
Approximation — தோராயம்
Arithmetic — எண் கணிதம், எண் கணக்கு
Ascending — ஏறும், ஏறுகின்ற
,, order — ஏறு வரிசை
Associative law — சேர்ப்பு விதி
Average — சராசரி
Axiom — வெளிப்படை உண்மை
Axis — அச்சு, ஆயம்

B

Base — அடி
Binomial — ஈருறுப்பு
,, expansion — ஈருறுப்பு விரிவு
,, theorem — ஈருறுப்புத் தேற்றம்
Biquadratic — நாற்படிய
,, equation — நாற்படிச் சமன்பாடு

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கீடு, கணிப்பு
Cancel — நீக்கு
Case — வகை
,, general — பொதுவகை
,, particular — குறிப்பிட்ட வகை
,, special — சிறப்பு வகை
Cipher — பூச்சியம்
Clockwise — வலஞ்சுழியாக, வலமர்ச
Coefficient — கெழு

Coefficient Binomial — ஈருறுப்புக் கெழு
Coincide — ஒன்றுபடு, பொருந்து
Coincident — ஒன்றிய, ஒன்றுபட்ட
,, roots — சமத் தீர்வுகள், ஒன்றிய தீர்வுகள்
Conclusion — முடிவு
Condition — கட்டுப்பாடு, நிபந்தனை
Conditional — நிபந்தனைக்குட்பட்ட
,, equation — நிபந்தனைச் சமன்பாடு
Conditions, necessary and sufficient — வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Conjugate — துணையிய, இணை
Conjugate algebraic numbers — துணையிய இயல் எண்கள்
,, complex number — துணையிய சிக்கலெண்
,, numbers — துணையிய எண்கள்
,, roots — துணையிய தீர்வுகள்
Common — பொதுவான
,, denominator — பொதுப்பகுவெண், பொதுபின்னக் கீழெண்
,, difference — பொது வேறுபாடு
,, divisor — பொது வகுக்குமெண்
,, factor — பொதுச்சினை
,, fraction — பொதுப் பின்னம்
,, logarithm — பொது மடக்கை
,, measure — பொது அளவு
,, multiple — பொது மடங்கு
,, ratio — பொது விகிதம் (தகவு)
Completing the square — வர்க்க நிறைவாக்கல்
Complex — சிக்கலான, கலப்பு
Complex number — சிக்கலெண், கலப்பெண்
,, quantity — சிக்கற் கணியம்
Consecutive — அடுத்தடுத்த, தொடர்ச்சியான

Consecutive numbers — அடுத்துவரும் எண்கள்
Consequent (Ratio) — பின்னுறுப்பு
Consistency — இசைவு, பொருத்தமுடைய
,, conditions for — இசைவு நிபந்தனைகள்
,, equations — சமன்பாடுகளின் இசைவுநிலை
Consistent — இசைவுள்ள, பொருத்தமுள்ள
Constant — மாறிலி, நிலையெண்
Construct — அமை, வரை
Contradiction — முரண்பாடு, எதிர்மறுப்பு
Contradictory — முரண்பாடான, எதிர்மறையான
Convention — வழக்கு, மரபு
Converse — மறுதலை
Conversely — மறுதலையாக
Conversion — மாற்றம்
Corollary — கிளைத் தேற்றம்
Correct — திருத்து, திருத்தமான
,, to the first place of decimals — முதல் பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
,, to the n th ,, ,, ,, — n ஆவது பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
Corresponding — ஒத்த, ஒப்பிய
Counter-clockwise — இடஞ்சுழியாக, இடமாக
Cross multiplication — குறுக்குப் பெருக்கல்
Cube root — முப்படி மூலம்
Cubic equation — முப்படிச் சமன்பாடு

D

Decrease — குறைதல்
Deduce — பகுத்தறி
Deduction — பகுத்தறிதல்
Define — வரையறு
Definite — வரையறுத்த
Definition — வரையறை
Denominator பகு எண்

Descarte's rule of sign — டேகார்ட்டின் குறிவிதி
Descending order — இறங்கு வரிசை
,, series — இறங்கு தொடர்
Difference — வேறுபாடு
,, Common — பொது வேறுபாடு
,, mean — சராசரி வேறுபாடு
,, of first order — முதல் வரிசை வேறுபாடு
,, of n th order — n ஆவது வரிசை மாறுபாடு
Differential — வகையீடு
,, Coefficient — வகைக்கெழு
Differentiate — வகைக்கெழு காண்
Differentiation — வகைக்கெழு காணல்
Digit — இலக்கம்
Discriminant — தன்மை காட்டி
Divide — வகு
Dividend — வகுபடும் எண்
Divisibility — வகுபடுதன்மை
Division — வகுத்தல், பிரித்தல்
,, synthetic — தொகுமுறை வகுத்தல்
Divisor — வகுக்கும் எண்
Double root — இரட்டைத் தீர்வு, இரு முறை மடங்கு தீர்வு

E

Element — மூலகம், மூலக உறுப்பு
Eliminate — விலக்கு, நீக்கு
Elmination — விலக்கல், நீக்கல்
Equal — சமம், சமன்
,, in all respects — சர்வசமம்
Equate — சமன் செய், சமன்படுத்து
Equation — சமன்பாடு
,, algebraic — இயற்கணிதச் சமன்பாடு
,, binomial — ஈருறுப்புக் கெழுச் சமன்பாடு
,, biquadratic — நாற்படிச் சமன்பாடு

Equation conditional	—	நிபந்தனைச் சமன்பாடு
,, cubic	—	முப்படிச் சமன்பாடு
,, homogeneous	—	ஒருபடித்தான சமன்பாடு
,, identical	—	சர்வ சமன்பாடு
,, indeterminate	—	தேராச் சமன்பாடு
,, linear	—	ஒருபடித்தான சமன்பாடு
,, member of an	—	சமன்பாட்டு உறுப்பு
,, numerical	—	எண் தழுவிய சமன்பாடு
,, quadratic	—	இருபடிச் சமன்பாடு
,, reciprocal	—	நிகர் மாற்றுச் சமன்பாடு, தலைகீழ்ச் சமன்பாடு
Equation, roots of an	—	சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்
,, simple	—	ஒருபடி ஓரினச் சமன்பாடு
Equations, simultaneous	—	ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்
,, solution of an	—	சமன்பாட்டின் தீர்வுகாணல்
,, transformation	—	சமன்பாட்டு மாற்றம், சமன்பாட்டு மாற்றமைப்பு
Equivalent	—	சமம்
Evaluate	—	மதிப்பிடு, மதிப்பு காண்
Even function	—	இரட்டைச் சார்பு
,, number	—	இரட்டைப் படை எண்
Exceptional case	—	விலக்கு வகை
Expand	—	விரி
Expansion	—	விரிவு
Explicit function	—	வெளிப்படைச் சார்பு
Exponent	—	படிக் குறி
Exponential function	—	படிக் குறிச் சார்பு
Expression	—	கோவை
,, binomial	—	ஈருறுப்புக் கோவை
,, irrational	—	அளவுக்கிணங்காத கோவை
,, linear	—	ஒருபடிக் கோவை
,, monomial	—	ஓருறுப்புக் கோவை
,, multinomial	—	பல்லுறுப்புக் கோவை
,, rational	—	அளவுக்கிணங்கிய கோவை

Expression trinomial	—	மூவுறுப்புக் கோவை
Extend	—	விரிதல், நீட்டுதல்
Extension	—	விரிவு

F

Factor	—	சினை
,, Common	—	பொதுச் சினை
,, highest common	—	பெரிய பொதுச் சினை, மீப் பெரு பொதுச்சினை
,, Prime	—	பகாச்சினை
Factorial	—	தொடர்ப் பெருக்கம்
,, n	—	n தொடர்ப் பெருக்கம்
Factorisation	—	சினை காணல்
Factorise	—	சினை காண்
Function	—	சார்பு

G

General solution	—	பொதுத் தீர்வு
Generating function	—	பிறப்பிக்கும் சார்பு
Geometric mean	—	பெருக்கிடை
,, progression	—	பெருக்குத் தொடர்
,, series	—	பெருக்குத் தொடர்
Graph	—	கோட்டுருவப்படம், வரைப் படம்
Graphical solution (of an equation)	—	கோட்டுருவப்பட வழியான தீர்வு

H

Hormonic mean	—	இசையிடை
,, progression	—	இசைத் தொடர்
Homogeneous	—	ஒருபடித்தான
,, products	—	சமபடிப் பெருக்கங்கள்

I

Identical	—	முழுதும் ஒத்த
Identity	—	முற்றொருமை
Illustration	—	எடுத்துக்காட்டு
Imaginary	—	கற்பனையான, மெய்யிலா
,, number	—	கற்பனை எண்
,, root	—	கற்பனைத் தீர்வு
Incommensurable		அளவுக்கிணங்காத, பொது அளவற்ற
Inconsistent	—	பொருந்தாத, முரணான
,, equations	—	பொருந்தாச் சமன்பாடுகள்
Idependent	—	சார்பற்ற, சார்பிலாத
,, variable	—	சார்பில் மாறி
Indeterminate	—	தேரப்பெறாத, தேரா
,, quantity	—	தேராக்கணியம்
Index	—	படிக்குறி, குறி அட்டவணை
,, of a root	—	அடிக்குறி, மூலக்குறி
Inequality	—	சமனின்மை
Integer	—	முழு எண்
,, positive	—	கூட்டு முழு எண்
,, negative	—	குறை முழு எண்

L

Like signs	—	ஒத்த குறிகள்
Like terms	—	ஒத்த உறுப்புகள்
Limit	—	எல்லை
Logarithm	—	மடக்கை (மகை)
,, common	—	பொது மடக்கை (மடக்கையடி)
,, Napierian	—	நேப்பியர் மடக்கை (மடக்கையடி e)

Logarithmic function — மடக்கைச் சார்பு

M

Mantissa	—	மடக்கை பின்னம்
Mathematics	—	கணிதம்
,, advanced	—	உயர்கணிதம்
,, applied	—	பயன் வழிக்கணிதம்
,, pure	—	தூய கணிதம்
Mathematical	—	கணிதத்திற்குரிய
,, induction	—	கணித முறை உய்த்தறிதல்
Maximum	—	மீப்பெரு
,, value	—	மீப்பெரு மதிப்பு
Mean	—	சராசரி, இடை
,, arithmetic	—	கூட்டிடை
,, geometric	—	பெருக்கிடை
,, harmonic	—	இசையிடை
Minimum	—	மீச்சிறு
Minimum value	—	மீச்சிறு மதிப்பு
Minus	—	கழி, குறை, எதிர்
,, sign	—	கழித்தற்குறி
Modulus	—	மட்டு, தனிமதிப்பு
Monomial	—	ஓருறுப்பு, ஓருறுப்புக்குரிய
Monotonic	—	ஓரியல்பான
,, function	—	ஓரியல்பான சார்பு
Multinomial	—	பல்லுறுப்புக்குரிய
,, expression	—	பல்லுறுப்புக் கோவை
,, theorem	—	பல்லுறுப்புத் தேற்றம்
Multiple	—	மடங்கு
,, common	—	பொது மடங்கு
,, least common	—	அதமப் பொதுமடங்கு
Multiplication	—	பெருக்கல்

Multiplicand — பெருக்கப்படும் எண்

Multiply — பெருக்கு

N

Negative — குறை, எதிர்

,, number — குறையெண்

,, quantity — குறைக் கணியம்

,, sign — குறைத்தற்குறி

Notation — குறியீடு, குறியீட்டு முறை

,, abridged — சுருக்கக் குறியீடு

Number — எண்

,, abstract — வெற்றெண்

,, even — இரட்டையெண்

,, odd — ஒற்றையெண்

,, prime — பகாவெண்

,, relation — எண் தொடர்பு

,, whole — முழுவெண்

Numeration — எண்ணீடு

Numerator — மேலெண்

Numerical — எண்ணாலாகிய

O

One and only root — ஒரேயொரு தீர்வு

P

Pair — இணையான

Plus — கூட்டு

Plus-sign — கூட்டற்குறி

Point — புள்ளி

Position — இடம்

Positive — மிகை, கூட்டு

Posiiive number — கூட்டெண்
,, quantity — கூட்டுக் கணியம்
Power — படி
Principle — விதி
Problem — கணக்கு
Process — வழி, செய்முறை
Product — பெருக்குத் தொகை
Progression — தொடர்
,, arthimetic — கூட்டுத் தொடர்
,, geometric — பெருக்குத் தொடர்
,, hormonic — இசைத் தொடர்
Proof — தெரிப்பு, நிறுவல்
Property — பண்பு

Q

Quadratic equation — இருபடிச் சமன்பாடு
,, expression — இருபடிக் கோவை
,, surd — அளவுக்கிணங்காத இருபடி மூலம்
Quantity — கணியம்
,, unknown — தேராக் கணியம்
Quarter — கால்
Quotient — ஈவு

R

Radical — படிமூலம், படிமூலமுடைய
Relation — தொடர்பு
Remainder — மீதி, மிச்சம்
,, Theorem — மீதித் தேற்றம்
Represent — குறி, வகை

Residue — எச்சம்
Root — தீர்வு
Root cube — முப்படி மூலம்
,, imaginary — கற்பனைத் தீர்வு
,, irrational — அளவுக்கிணங்காத் தீர்வு
,, rational — அளவுக்கிணங்கிய தீர்வு
,, real — மெய்யெண் தீர்வு
,, square — இருபடி மூலம்

S

Sign — குறி
Simultaneous — ஒருங்கமை
Solution — தீர்வு
Solve — தீர்வு காண்
Square — சதுரம்
,, root — வர்க்க மூலம்
Squared (x^2) — இருபடி — x-ன்
Standard — திட்டமான
,, form — திட்ட அமைப்பு
Subtract — கழி
Sum — கூட்டுத் தொகை, மொத்தம்
Summation — கூட்டல்
Symbol — குறியீடு
Symmetric — சமச்சீரான, சமச்சீருள்ள
,, expression — சமச்சீர் கோவை
Symmetry — சமச்சீர்

T

Table — அட்டவணை
Term — உறுப்பு

Term absolute — தனி உறுப்பு
,, negative — குறை உறுப்பு
,, positive — கூட்டு உறுப்பு
Theory — கொள்கை
,, of equation — சமன்பாட்டுக் கொள்கை
,, of numbers — எண்கொள்கை, எண்ணியல்
Transformation — மாற்றம், உருவமாற்றம், நிலைமாற்றம்
,, of Equation — சமன்பாட்டு மாற்றம்
Transposition — இடமாற்றம்

U

Undermined — தேரா
Unit — அலகு
Unlike — ஒவ்வாத
Unlimited — எல்லையில்லாத

V

Value — மதிப்பு
,, indeterminate — தேரமுடியாத மதிப்பு
,, limiting — எல்லை மதிப்பு
,, real — உண்மை மதிப்பு
Variable — மாறி
,, dependent — சார்புடை மாறி
,, independent — சார்பில் மாறி
Variate . — மாறி
Variation — மாறல், மாறுபாடு
Verification — சரிபார்த்தல்
Verify — சரி பார்

W

Whole number	—	முழு எண்

X

X-axis	—	X - அச்சு

Y

Y-axis	—	Y - அச்சு

Z

Zero	—	பூச்சியம்